NASTAVNO PISMO

ZA

SREDNJOŠKOLSKO

OBRAZOVANJE

ODRASLIH

Zanimanje: VOZAČ MOTORNOG VOZILA

Nastavni predmet: MATEMATIKA

DRUGI RAZRED

1. LINEARNE JEDNADŽBE I NEJEDNADŽBE
2. OMJERI I RAZMJERI
3. TROKUT
4. ČETVEROKUT
5. KRUG I KRUŽNICA
6. SKUP KOMPLEKSNIH BROJEVA
7. KVADRATNA JEDNADŽBA I KVADRATNA FUNKCIJA

AUTOR: Marija Mlinarević, prof.

Zagreb, 2010.

SADRŽAJ

1. LINEARNE JEDNADŽBE I NEJEDNADŽBE

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:
1. *Što je linearna jednadžba? Koji su koraci u rješavanju linearne jednadžbe? Kako nam jednadžbe mogu pomoći u rješavanju svakodnevnih rješenja?*
2. *Što je linearna nejednadžba i kako se rješava?*
3. *Što su sustavi linearnih jednadžbi? Kojim metodama ih rješavamo? U Kakvim ih matematičkim zadacima koristimo?*

1.1. LINEARNE JEDNADŽBE S JEDNOM NEPOZNANICOM

linearna jednadžba

Linearna jednadžba s jednom nepoznanicom je jednadžba oblika $ax+b=0$, gdje su a i b realni brojevi i $a \neq 0$.

Riješiti linearnu jednadžbu znači odrediti takav realan broj koji uvršten u jednadžbu umjesto nepoznanice x daje istinitu brojčanu jednakost.

Dvije jednadžbe su **ekvivalentne** ako imaju isto rješenje.

Linearnu jednadžbu rješavamo tako da je uzastopnom primjenom svojstava realnih brojeva svodimo na jednostavniju, ali ekvivalentnu jednadžbu.

postupak rješavanja linearne jednadžbe

U postupku rješavanja linearnih jednadžbi primjenjujemo sljedeća svojstva:
1. Ako lijevoj i desnoj strani jednadžbe dodamo ili oduzmemo isti broj, rješenje se ne mijenja. Ovo svojstvo često tumačimo: ako u jednadžbi članove prebacujemo na drugu stranu znaka jednakosti (s lijeve na desnu ili s desne na lijevu), mijenjamo im predznake.
2. Ako lijevu i desnu stranu jednadžbe pomnožimo ili podijelimo istim brojem različitim od nule, rješenje se ne mijenja.

Primjer 1. Riješimo jednadžbu: $8x-2+x=5x-10$.

I na lijevoj i na desnoj strani jednadžbe su i poznati i nepoznati članovi. Nepoznate ćemo napisati na jednoj, a poznate članove na drugoj strani jednadžbe. Prema 1. svojstvu: ako poznate ili nepoznate članove prebacimo s jedne na drugu stranu jednakosti, promijenit ćemo im predznak.

$$8x+x-5x=2-10$$

Primjenom svojstva distributivnosti dobivamo:

$$4x=-8 \ / :4 \qquad \text{(primijenimo 2. svojstvo)}$$
$$x=-2$$

Provjera: $8\cdot(-2)-2+(-2)=5\cdot(-2)-10$

$$-20=-20$$

Broj -2 je rješenje jednadžbe.

Primjer 2. Riješimo jednadžbu:
$$35-2\cdot[3\cdot(2x-5)-5\cdot(9-x)]=3\cdot(4x-13)-7x+5.$$

Najprije se, primjenom svojstva distributivnosti, rješavamo zagrada, od unutarnje prema vanjskoj. Nakon toga, postupamo kao u Primjeru 1.

$$\begin{gathered}35-2\cdot[6x-15-45+5x]=12x-39-7x+5\\ 35-12x+30+90-10x=12x-39-7x+5\\ -27x=-189 \;/ :(-27)\\ x=7\end{gathered}$$

Provjerite je li $x=7$ rješenje zadane jednadžbe.

Primjer 3. Riješimo jednadžbu: $1-\frac{x+6}{5}=\frac{x}{2}-3$.
Svaki član jednadžbe najprije množimo s najmanjim zajedničkim nazivnikom (najmanjim zajedničkim višekratnikom) brojeva 5 i 2, tj. brojem 10:

$$\begin{gathered}10-2\cdot(x+6)=5x-30\\ 10-2x-12=5x-30\\ -2x-5x=-10+12-30\\ -7x=-28 \;/ :(-7)\\ x=4\end{gathered}$$

Provjerite je li $x=4$ rješenje zadane jednadžbe.

Primjer 4. Riješimo jednadžbu: $\frac{1}{x^2-x}-\frac{x}{x-1}=-1$.
Najprije nazivnike razlomaka rastavimo na faktore:

$$\frac{1}{x(x-1)}-\frac{x}{x-1}=-1 \qquad \text{Uvjeti: } x\neq 0 \text{ i } x\neq 1$$

Zatim odredimo najmanji zajednički višekratnik nazivnika. To je broj $x(x-1)$.
Njime pomnožimo svaki član jednadžbe:

$$1-x^2=-x^2+x$$

Dobivena jednadžba nije ekvivalentna zadanoj zato što brojevi 0 i 1 mogu biti njezina rješenja, ali nijedan od njih ne može biti rješenje zadane jednadžbe.
Nastavimo s rješavanjem i dobijemo: $x=0$.
Za $x=0$ u prvom razlomku zadane jednadžbe dobivamo nulu u nazivniku.
Stoga jednadžba nema rješenje.

1.2. PRIMJENA LINEARNE JEDNADŽBE

Zadatke zadane tekstom koji se svode na rješavanje linearne jednadžbe nazivamo problemima prvog stupnja.

Oni u sebi sadrže neki realan, praktičan problem s kojim se susrećemo u

svakodnevnom životu, a za njihovo rješavanje nema posebnih recepata.
No, rješavanje provodimo u nekoliko koraka:

1. Razumijevanje problema.
2. Odabiranje nepoznate veličine.
3. Postavljanje jednadžbe.
4. Rješavanje jednadžbe.
5. Formuliranje odgovora riječima.

Primjer 1. Za školu je kupljeno ukupno 18 velikih i malih lopti za 753 kune. Cijena velike lopte je 62.5 kuna, a male 31.5 kuna. Koliko je kupljeno velikih, a koliko malih lopti.

primjena linearne jednadžbe na zadatke iz svakodnevnog života

Ako s x označimo broj kupljenih velikih lopti, onda je $18-x$ broj kupljenih malih lopti. Prema uvjetima zadatka pišemo jednadžbu:

$$62.5x+31.5(18-x)=753$$

Rješavanjem jednadžbe dobivamo $x=6$.
Velikih lopti je kupljeno 6, a malih $18-6=12$.

Primjer 2. Otac ima 28 godina, a sin 4 godine. Za koliko će godina otac biti tri puta stariji od sina?

Za x godina će otac imati $28+x$ godina, a sin $4+x$. Prema uvjetima zadatka pišemo jednadžbu:

$$28+x=3(4+x)$$

Rješenje jednadžbe je $x=8$.
Za 8 godina otac će biti tri puta stariji od sina, tj. otac će imati 36 godina, a sin 12 godina.

Primjer 3. Iz mjesta A prema udaljenom mjestu B krene autobus i vozi stalnom brzinom od 70 km/h. Dva sata nakon njega na isti put krene automobil i vozi stalnom brzinom od 110 km/h. Za koliko vremena će automobil sustići autobus?

Za x sati vožnje autobusa automobil će voziti $x-2$ sata pa vrijedi:

$$70\cdot x=110\cdot(x-2)$$

Rješenje je $x=5.5$ sati, tj. automobil će sustići autobus za 5 h i 30 min.

1.3. LINEARNE NEJEDNADŽBE S JEDNOM NEPOZNANICOM

Linearna nejednadžba s jednom nepoznanicom je nejednadžba oblika $ax+b<0$, $ax+b\le 0$, $ax+b>0$ ili $ax+b\ge 0$ gdje su a i b realni brojevi i $a\ne 0$.

linearna nejednadžba

Dakle, zamijenimo li u linearnoj jednadžbi znak jednakosti znakom nejednakosti, dobivamo linearnu nejednadžbu.

Broj je rješenje nejednadžbe ako uvršten u nejednadžbu daje istinitu nejednakost.

Riješiti nejednadžbu znači naći skup svih rješenja te nejednadžbe.

Nejednadžbe rješavamo sličnim postupkom kao i jednadžbe:

1. Ako lijevoj i desnoj strani nejednadžbe dodamo ili oduzmemo isti broj, nejednakost ostaje nepromijenjena
2. a) Ako lijevu i desnu stranu nejednadžbe pomnožimo ili podijelimo pozitivnim brojem, nejednakost ostaje nepromijenjena.
   b) Ako lijevu i desnu stranu nejednadžbe pomnožimo ili podijelimo negativnim brojem, znak nejednakosti se mijenja.

Rješenje nejednadžbe zapisujemo u obliku intervala i prikazujemo na brojevnom pravcu.

Primjer 1. Riješimo nejednadžbu: $\frac{3}{5}x+\frac{1}{2}>\frac{3}{2}x-\frac{1}{5}$.

Pomnožimo lijevu i desnu stranu nejednadžbe najmanjim zajedničkim nazivnikom, tj. brojem 10. Budući da nejednadžbu množimo pozitivnim brojem, znak nejednakosti se ne mijenja:

$$\frac{3}{5}x+\frac{1}{2}>\frac{3}{2}x-\frac{1}{5} \;/\cdot 10$$
$$6x+5>15x-4$$
$$6x-15x>-4-5$$
$$-9x>-9 \;/:(-9)$$

Nejednadžbu dijelimo negativnim brojem pa se mijenja znak nejednakosti:

$$x<1$$

Rješenja nejednadžbe pripadaju skupu svih realnih brojeva koji su manji od 1, tj. $x\in\langle-\infty,1\rangle$.

Primjer 2. Riješimo nejednadžbu: $\frac{x-4}{3}-2+\frac{x+1}{2}\le 2x-\frac{x-1}{6}$.

Lijevu i desnu stranu nejednadžbe množimo brojem 6.

$$\frac{x-4}{3}-2+\frac{x+1}{2}\le 2x-\frac{x-1}{6} \;/\cdot 6$$
$$2(x-4)-12+3(x+1)\le 12x-(x-1)$$
$$2x-8-12+3x+3\le 12x-x+1$$
$$2x+3x-12x+x\le 1+8+12-3$$
$$-6x\le 18 \;/:(-6)$$
$$x\ge -3$$

Rješenja nejednadžbe pripadaju skupu svih realnih brojeva koji su veći ili jednaki -3, tj. $x\in(-3,+\infty]$.

1.4. SUSTAV DVIJU LINEARNIH JEDNADŽBI S DVJEMA NEPOZNANICAMA

Sustav dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama je sustav oblika

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases},$$

gdje su a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 i c_2 realni brojevi, a x i y realni brojeve koje trebamo odrediti, tj. nepoznate veličine ili nepoznanice. Brojeve a_1, b_1, a_2 i b_2 nazivamo koeficijentima uz nepoznanice, a brojeve c_1 i c_2 nazivamo slobodnim koeficijentima.

sustav dviju linearnih jednadžbi

Rješenje sustava je svaki par realnih brojeva koji uvršten umjesto x i y u obje jednadžbe dovodi do istinitih brojčanih jednakosti.

Kod sustava dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama mogu nastupiti sljedeća tri slučaja:

1. sustav ima točno jedno rješenje,
2. sustav ima beskonačno mnogo rješenja,
3. sustav nema rješenja.

broj rješenja sustava

Više je metoda rješavanja sustava dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama, a ovdje upoznajemo sljedeće:

1. metoda supstitucije,
2. metoda suprotnih koeficijenata,
3. grafička metoda.

metode rješavanja sustava

1.4.1. METODA SUPSTITUCIJE

Metoda se temelji na tome da se iz jedne od jednadžbi jedna od nepoznanica izrazi pomoću druge, a zatim se uvrsti (supstituira) u drugu jednadžbu.

metoda supstitucije

Primjer 1. Riješimo sustav jednadžbi: $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ 3x + 5y = 43 \end{cases}.$

Iz prve jednadžbe izrazimo $x = 2y + 7$ i uvrštavamo u drugu jednadžbu:

$$3(2y+7) + 5y = 43$$
$$11y = 22$$
$$y = 2$$

Uvrštavanjem u jednadžbu $x = 2y + 7$ dobijemo:

$$x = 2 \cdot 2 + 7 = 11$$

Sustav ima jedinstveno rješenje $x = 11$ i $y = 2$, što zapisujemo kao uređen par $(11,2)$.

Primjer 2. Riješimo sustav jednadžbi: $\begin{cases} 4x - y = 7 \\ -8x + 2y = -13 \end{cases}.$

z prve jednadžbe dobijemo da je $y = 4x - 7$. Uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobijemo:

$$-8x + 2(4x - 7) = -13$$

iz čega slijedi:

$$0 \cdot x = 1$$

Budući da ne postoji realni broj x koji ispunjava dobivenu jednadžbu, zaključujemo da zadani sustav nema rješenja.

Za sustav koji nema rješenja kaže se i nemoguć sustav.

nemoguć sustav

Primjer 3. Riješimo sustav jednadžbi: $\begin{cases} 4x - 3y = 12 \\ -12x + 9y = -36 \end{cases}.$

Iz prve jednadžbe dobijemo da je $y = \frac{4}{3}x - 4$. Uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobijemo:

$$-12x + 9\left(\frac{4}{3}x - 4\right) = -36$$

iz čega slijedi:

$$0 \cdot x = 0$$

Dobivena jednadžba ispunjena je za sve realne brojeve x. Zato zadani sustav ima beskonačno mnogo rješenja.

Za sustav koji ima beskonačno mnogo rješenja kaže se i neodređen sustav.

neodređen sustav

1.4.2. METODA SUPROTNIH KOEFICIJENATA

Metoda se sastoji u tome da uz istu nepoznanicu u jednadžbama sustava imamo suprotne koeficijente što postižemo množenjem jedne (ili obje jednadžbe)nekim pogodnim brojem. Zatim se jednadžbe zbroje, a pri zbrajanju jednadžbi jedna se nepoznanica poništi.

metoda suprotnih koeficijenata

Primjer 1. Riješimo sustav jednadžbi: $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 2x - y = 1 \end{cases}.$

Pomnožimo li drugu jednadžbu s 2 dobijemo sustav:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}.$$

Zbrajanjem jednadžbi dobijemo:

$$7x = 14$$
$$x = 2$$

Uvrštavanjem u drugu jednadžbu zadanog sustava dobijemo da je $y = 3$.

Primjer 2. Riješimo sustav jednadžbi: $\begin{cases} \dfrac{4x-y-12}{5}+\dfrac{x-2y+3}{15}=0 \\ \dfrac{5x-y-9}{12}-\dfrac{4x-y-13}{9}=1 \end{cases}$.

Jednadžbe sustava najprije moramo pojednostaviti, tj. srediti sustav.
Množenjem prve jednadžbe s 15, a druge s 36 dobijemo:

$$\begin{cases} 3(4x-y-12)+x-2y+3=0 \\ 3(5x-y-9)-4(4x-y-13)=36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x-3y-36+x-2y+3=0 \\ 15x-3y-27-16x+4y+52=36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13x-5y=33 \\ -x+y=11 \end{cases}$$

Množenjem druge jednadžbe s 5 dobijemo sustav:

$$\begin{cases} 13x-5y=33 \\ -5x+5y=55 \end{cases}$$

Zbrajanjem jednadžbi dobijemo:

$$8x=88$$
$$x=11$$

Uvrštavanjem u drugu jednadžbu zadanog sustava dobijemo da je $y=22$.

1.4.3. GRAFIČKA METODA RJEŠAVANJA SUSTAVA

grafička metoda rješavanja sustava

Grafičko rješavanje sustava dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama temelji se na predočavanju jednadžbi sustava u koordinatnoj ravnini.

Primjer 1. Riješimo sustav: $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+y=5 \end{cases}$.

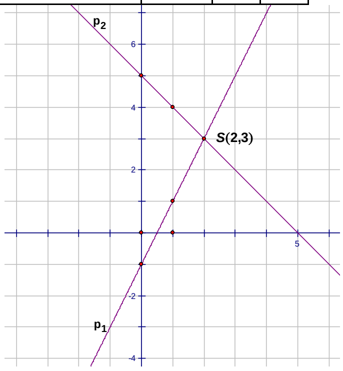
Svaka jednadžba sustava predstavlja pravac u koordinatnoj ravnini. Zapišimo njihove jednadžbe u eksplicitnom obliku i nacrtajmo ih u istom koordinatnom sustavu:

$p_1 \ldots y=2x-1$

$p_2 \ldots y=-x+5$

x	0	1	2
$y=2x-1$	-1	1	3

x	0	1	2
$y=-x+5$	5	4	3



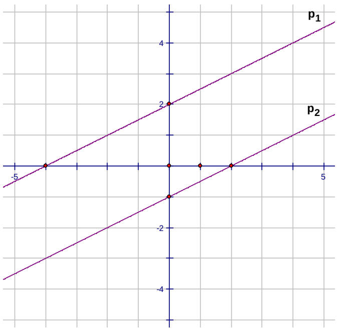
Sjecište zadanih pravaca je točka S čije je koordinate moguće pročitati iz koordinatnog sustava, $S(2,3)$.
Pravci imaju jednu točku zajedničku pa zaključujemo da sustav ima jedinstveno rješenje $x=2$ i $y=3$.

Primjer 2. Riješimo sustav: $\begin{cases} x-2y=-4 \\ x-2y=2 \end{cases}$.

Zapišimo jednadžbe pravac u eksplicitnom obliku i nacrtajmo ih u istom koordinatnom sustavu:

$$p_1 \ldots y=\frac{1}{2}x+2$$

$$p_2 \ldots y=\frac{1}{2}x-1$$



Uočimo da zadani pravci imaju jednake koeficijente smjera. Oni su paralelni, tj. nemaju zajedničkih točaka. Zaključujemo da sustav nema rješenja.

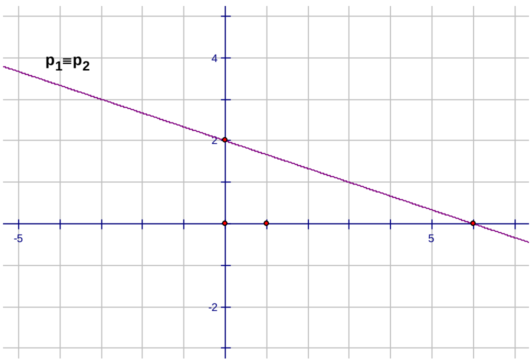
Primjer 3. Riješimo sustav: $\begin{cases} x+3y-6=0 \\ 2x+6y-12=0 \end{cases}$.

Zapišimo jednadžbe pravac u eksplicitnom obliku i nacrtajmo ih u istom koordinatnom sustavu:

$$p_1 \ldots y=-\frac{1}{3}x+2$$

$$p_2 \ldots y=-\frac{1}{3}x+2$$

Jednadžbama sustava zadan je isti pravac.



Zadani pravci se podudaraju, tj. sve točke su im zajedničke. Zaključujemo da sustav ima beskonačno mnogo rješenja.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Riješi jednadžbe:

a) $31x-5-3\cdot\{2x-3\cdot[2x-3\cdot(2x-3)]\}=-1$

b) $\frac{5x+1}{2}-\frac{1-3x}{4}-\frac{2x+3}{8}=\frac{x-3}{4}+\frac{5}{2}$

c) $2-\frac{1}{3}\cdot\left(9+\frac{5}{2}x\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\right)$

d) $x-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)\right]=x-\frac{x-2}{3}$

e) $\frac{x+1}{4}-3\cdot\left[\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]=1-\frac{x-6}{6}$

f) $\frac{5}{3x+4}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{(x-1)(3x+4)}$

g) $\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{2x}{x^2-1}$

2. Ivan je zamislio broj, pomnožio ga s $\frac{2}{3}$, od umnoška oduzeo 4, razliku podijelio s -2 i količniku pribrojio 8. Nakon računanja dobio je rezultat 5. Koji je broj zamislio?

3. Kad je biciklist prešao trećinu puta, do polovine puta ostalo mu je prijeći još 16 km. Koliko je dug put?

4. U parku je zasađeno 219 stabala. Hrastova je zasađeno tri puta manje nego javora, breza 14 više nego hrastova, a topola dva puta manje nego breza. Koliko je zasađeno stabala pojedine vrste?

5. Svi učenici neke škole planiraju ići na izlet. Ako naruče 15 jednakih autobusa, ostat će 16 praznih sjedala. Ako naruče 14 takvih autobusa, za 20 učenika neće biti sjedećih mjesta. Koliko sjedala ima svaki autobus i koliko učenika ima u toj školi?

6. Riješi nejednadžbu, skup rješenja skiciraj na brojevnom pravcu i zapiši u obliku intervala:

a) $\frac{1-0.5x}{3}-\frac{2-0.25x}{4}+1\leq 0$

b) $-x-\frac{1+1.5x}{4}-\frac{2+0.25x}{3}\geq 2$

c) $x-\frac{1-1.5x}{4}-\frac{2-0.25x}{3}\leq 2$

d) $\frac{1-\frac{x}{2}}{3}-\frac{2-\frac{x}{4}}{4}+1\geq 0$

7. Metodom supstitucije riješi sustav jednadžbi:

a) . $\begin{cases}2x-5y=7\\-x+3y=-5\end{cases}$

b) $\begin{cases}5\cdot(x-1)-4\cdot(x+y)=0\\4x-3\cdot(y-2)=0\end{cases}$

8: Metodom suprotnih koeficijenata riješi sustav jednadžbi:

a) $\begin{cases} \dfrac{4x-y-12}{5}+\dfrac{x-2y+3}{15}=0 \\ \dfrac{5x-y-9}{12}-\dfrac{4x-y-13}{9}=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{2x+y-6}{3}-\dfrac{x+3y+5}{2}=\dfrac{5x-4y-1}{2} \\ \dfrac{7x+2y+9}{6}-\dfrac{3x-y-1}{2}-\dfrac{x+y+11}{3}=0 \end{cases}$

9. Grafičkom metodom riješi sustav jednadžbi:

a) $\begin{cases} 3x+y=-9 \\ x-y=-7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ -4x+2y-2=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+3y-6=0 \\ x+3y+9=0 \end{cases}$

2. OMJERI I RAZMJERI

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:

1. Što je omjer? Što je razmjer? Što je proporcionalnost? Što je obrnuta proporcionalnost? Što je postotak? Što je promil?
2. Kako nam navedeni pojmovi mogu pomoći u rješavanju problemskih situacija u svakodnevnom životu?

2.1. OMJERI I RAZMJERI

Omjer dvaju realnih brojeva jest količnik tih bojeva, tj. $a:b=\dfrac{a}{b}$, gdje su a i b realni brojevi i $b\neq 0$. ***omjer***

Omjer $a:b$ čitamo „a naprema b“ ili „a prema b“.

Broj a se naziva prvi član, a broj b drugi član omjera. S obzirom da je omjer količnik, za njega vrijedi svojstva racionalnih brojeva.

Vrijednost omjera se ne mijenja ako mu se oba člana pomnože ili podijele istim brojem različitim od nule.

Primjer 1. Pojednostavnimo omjere:

a) $32:24=\dfrac{32}{24}=\dfrac{4}{3}=4:3$

b) $5\dfrac{1}{16}:3\dfrac{3}{8}=\dfrac{81}{16}:\dfrac{27}{8}=\dfrac{81}{16}:\dfrac{54}{16}=81:54=3:2$

c) $0.9:4.5=9:45=1:5$

Jednakost omjera $a:b$ i $c:d$, gdje su a, b, c i d realni brojevi i različiti od nule, tj.

$$a:b=c:d$$

naziva se **razmjer (proporcija)**.
Razmjer $a:b=c:d$ čitamo „a naprema b se odnosi kao c naprema d“.

razmjer

Brojevi a i d se nazivaju vanjski, a b i c unutarnji članovi razmjera.

S obzirom da je $a:b=c:d$ možemo pisati $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ pa prema kriteriju jednakosti racionalnih brojeva slijedi da je

$$a\cdot d=b\cdot c.$$

Drugim riječima, umnožak vanjskih članova razmjera jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera.

Primjer 2. Izračunajmo nepoznati član razmjera:

a) $(5-x):4=(2x-3):6$

Budući da je umnožak vanjskih članova razmjera jednak umnošku unutarnjih članova razmjera, slijedi:

$$\begin{aligned} 6\cdot(5-x)&=4\cdot(2x-3)\\ 30-6x&=8x-12\\ -14x&=-42\\ x&=3 \end{aligned}$$

b) $\left(\frac{4}{3}x-1\right):\frac{1}{3}=\left(\frac{3}{4}x+2\right):\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}x-1\right)&=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}x+2\right)\\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{4}&=\frac{1}{4}x+\frac{2}{3} \quad / \cdot 12\\ 4x-3&=3x+8\\ x&=11 \end{aligned}$$

Jednakost triju ili više omjera naziva se **produženi razmjer**.

produženi razmjer

Primjer 3. Iz razmjera $a:b=2:3$ i $b:c=5:6$ odredimo produženi razmjer $a:b:c$.

Iz $a:b=2:3$ slijedi $a=\frac{2}{3}b$, a iz $b:c=5:6$ slijedi $c=\frac{6}{5}b$.

$$a:b:c=\frac{2}{3}b:b:\frac{6}{5}b=\frac{2}{3}:1:\frac{6}{5}=\frac{10}{15}:\frac{15}{15}:\frac{18}{15}=10:15:18.$$

2.2. PROPORCIONALNOST

Dvije su veličine **proporcionalne** ako iz povećanja (smanjenja) vrijednosti jedne od njih slijedi povećanje (smanjenje) vrijednosti druge veličine isti broj puta.

Kažemo da je veličina y **proporcionalna** veličini x s koeficijentom proporcionalnosti k ($k>0$) ako je : $y=k\cdot x$.

Ako su x i y proporcionalne veličine tada vrijedi razmjer $x_1:x_2=y_1:y_2$, gdje su x_1 i y_1, odnosno x_2 i y_2 odgovarajuće vrijednosti veličina x i y.

Postupak koji ćemo primjenjivati pri rješavanju zadataka kod kojih između zadanih i traženih veličina postoji proporcionalnost ili obrnuta proporcionalnost naziva se pravilo trojno.

pravilo trojno

$$\begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{array}$$

$$x_1:x_2=y_1:y_2$$

Primjer 1. Autobus se kreće stalnom brzinom i za 4 sata i 30 minuta prijeđe 279 km.

a) Koliki će put tom brzinom prijeći za 3 sata i 15 minuta?
b) Za koje će vrijeme prijeći 254.2 km?

a)

4 h 30 min = 4.5 h	279 km
3h 15 min = 3.25 h	x km

Zapisujemo razmjer: $4.5:3.25=279:x$ iz čega slijedi da je $x=201.5$ km.
Avion će za 3 h i15 min prijeći put dug 201.5 km.

b)

4 h 30 min = 4.5 h	279 km
x h	254.2 km

Zapisujemo razmjer: $4.5:x=279:254.2$ iz čega slijedi da je $x=4.1$.
Avion će 254.2 km prijeći za 4.1 h, odnosno 4 h i 6 min.

Primjer 2. U jedno kolo lutrije tri prijatelja ulože 600 kn, 900 kn i 1500 kn. Kako će pravedno podijeliti dobitak od 17000 kn?

Dobitak će pravedno podijeliti ako će ga dijeliti proporcionalno uloženom novcu, tj. ako s x označimo iznos koji će dobiti prvi prijatelj, s y iznos koji će dobiti drugi prijatelj, a sa z iznos koji će dobiti treći prijatelj, onda mora vrijediti:

$$x:y:z=600:900:1500$$

iz čega, zbog proporcionalnosti, slijedi

$$x=600k,\ y=900k \text{ i } z=1500k.$$

Budući je

$$x + y + z = 17000,$$

dobivamo

$$600k + 900k + 1500k = 17000$$

pa je $k = \frac{73}{3}$.

Prvi prijatelj će dobiti 3400 kn, drugi 5100 kn, a treći 8500 kn.

2.3. OBRNUTA PROPORCIONALNOST

Dvije su veličine **obrnuto proporcionalne** ako iz povećanja (smanjenja) vrijednosti jedne od njih slijedi smanjenje (povećanje) vrijednosti druge veličine isti broj puta.

Kažemo da je veličina y **obrnuto proporcionalna** veličini x s koeficijentom proporcionalnosti k ($k > 0$) ako je : $x \cdot y = k$.

Ako su x i y proporcionalne veličine tada vrijedi razmjer $x_1 : x_2 = y_2 : y_1$, gdje su x_1 i y_1, odnosno x_2 i y_2 odgovarajuće vrijednosti veličina x i y.

$$\downarrow \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{array} \uparrow$$

$$x_1 : x_2 = y_2 : y_1$$

Primjer 1. Za prijevoz sirove nafte potrebno je 40 cisterni nosivosti 20.2 t.

a) Ako su na raspolaganju cisterne nosivosti 25.25 t, koliko će ih trebati za prijevoz iste količine nafte?
b) Kolika je nosivost cisterni ako će ih za prijevoz iste količine nafte trebati 64?

a)

$$\downarrow \begin{array}{ll} 40 \text{ cisterni} & 20.2 \text{ t} \\ x \text{ cisterni} & 25.25 \text{ t} \end{array} \uparrow$$

Zapisujemo razmjer: $40 : x = 25.25 : 20.2$ iz čega slijedi da je $x = 32$.
Ako su na raspolaganju cisterne nosivosti 25.25 t, za prijevoz iste količine nafte trebat će 32 cisterne.

b)

$$\downarrow \begin{array}{ll} 40 \text{ cisterni} & 20.2 \text{ t} \\ 64 \text{ cisterni} & x \text{ t} \end{array} \uparrow$$

Zapisujemo razmjer: $40 : 64 = 20.2 : x$ iz čega slijedi da je $x = 12.625$.
Ako je za prijevoz iste količine nafte potrebno 64 cisterni, njihova je nosivost 12.625 t.

Primjer 2. 15 radnika mogu iskopati jarak za 7 dana. Poslije 4 dana razboljelo se 6 radnika. Koliko dana će radnici kasniti s obavljanjem posla?

U zadatku razmatramo što se događa nakon 4 dana, tj. nakon što su se razboljela 6 radnika. Moramo odrediti za koliko će dana 9 radnika obaviti posao koji bi za 3 dana obavilo 15 radnika.

$$\downarrow \begin{array}{r} 15 \text{ radnika} \\ 9 \text{ radnika} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \text{ dana} \\ x \text{ dana} \end{array} \uparrow$$

Zapisujemo razmjer: $15:9=x:3$ iz čega slijedi da je $x=5$.
Radnici će s obavljanjem posla kasniti $5-3=2$ dana.

2. 4. POSTOTNI RAČUN

postotak

Postotak je razlomak s nazivnikom 100, tj razlomak oblika $\frac{p}{100}$.

Razlomak $\frac{p}{100}$ piše se p% i čita „pe posto“.

Primjer 1. Napišimo u obliku postotka:

a) $\frac{7}{100}=7\%$

b) $\frac{1}{10}=\frac{10}{100}=10\%$

c) $\frac{2}{5}=\frac{40}{100}=40\%$

d) $0.93=\frac{93}{100}=93\%$

formula postotnog računa

Ilustrirat ćemo kako se postoci upotrebljavaju u praktičnim primjerima. U rješavanju zadatak koristit ćemo **formulu postotnog računa**.

Za zadani broj p, $p>0$ je $p\%(x)=\frac{p}{100}\cdot x$ što se zapisuje i:

$$y=\frac{p}{100}\cdot x,$$

odnosno

$$y=p\%(x),$$

gdje je p **postotak**, x nazivamo **osnovna vrijednost**, a y **postotni iznos**.

Primjer 2. Cijena nekog proizvoda iznosila je 3750 kn. Tom je proizvodu cijena snižena 8%. Kolika je cijena tog proizvoda nakon sniženja?

Računamo koliko je 8% od broja 3570: $\frac{8}{100}\cdot 3570 = 300$.

Prema tome cijena je snižena 300 kn, dakle cijena nakon sniženja je 3450 kn.

Primjer 3. U nekoj školi s 1250 učenika pozitivnu ocjenu iz matematike na kraju školske godine imalo je 1185 učenika. U drugoj školi s 900 učenika matematiku nije položilo 45 učenika. U kojoj je školi bio bolji uspjeh iz matematike?

Računamo postotak prolaznosti u obje škole primjenom formule postotnog računa ako je zadana osnovna vrijednost i postotni iznos. U prvoj školi matematiku je položilo $\frac{1185\cdot 100}{1250} = 94.8\%$ učenika.

U drugoj školi matematiku je položilo $900 - 45 = 855$ učenika što je $\frac{855\cdot 100}{900} = 95\%$. Zaključujemo da je uspjeh iz matematike bio bolji u drugoj školi.

Primjer 4. Trgovački putnik osim plače i plaćenog prijevoza dobije proviziju od 3.5% po narudžbi. Koliku je narudžbu ima trgovački putnik u jednom mjesecu ako mu je provizija bila 420 kn?

Primjenom formule postotnog računa, izračunajmo osnovnu vrijednost ako je zadan postotak i postotni iznos: $\frac{420\cdot 100}{3.5} = 12000$.

Trgovački putnik imao je narudžbu u vrijednosti 12000 kn.

Primjer 5. Prilikom prženja kava gubi 12% svoje mase. Koliko treba sirove kave ako želimo dobiti 2.2 t pržene kave?

Označimo sa x masu sirove kave. Prema uvjetu zadatka imamo:

$$x - 12\%(x) = 2.2$$
$$x - \frac{12}{100}\cdot x = 2.2$$
$$x - 0.12x = 2.2$$
$$0.88x = 2.2$$
$$x = 2.5$$

Potrebno je 2.5 tona sirove kave.

2. 5. PROMILNI RAČUN

Promil je razlomak s nazivnikom 1000, tj razlomak oblika $\frac{p}{1000}$. ***promil***

Razlomak $\frac{p}{1000}$ piše se p‰ i čita „pe promila“.

Primjer 1. Napišimo u obliku promila:

a) $\dfrac{17}{1000} = 17‰$

b) $\dfrac{9}{100} = \dfrac{90}{1000} = 9‰$

c) $\dfrac{3}{5} = \dfrac{600}{1000} = 600‰$

d) $0.123 = \dfrac{123}{1000} = 123‰$

Ilustrirat ćemo kako se postoci upotrebljavaju u praktičnim primjerima. U rješavanju zadatak koristit ćemo **formulu promilnog računa**.

formula promilnog računa

Za zadani broj p, $p > 0$ je $p‰(x) = \dfrac{p}{1000} \cdot x$ što se zapisuje i:

$$y = \frac{p}{1000} \cdot x,$$

odnosno

$$y = p‰(x),$$

gdje je p **promil**, x nazivamo **osnovna vrijednost**, a y **promilni iznos**.

Primjer 2. Broj stanovnika se u nekom gradu, u odnosu na prošlu godinu povećao se 5‰ i sada iznosi 5040. Koliki je prirast stanovništva bio ove godine?

Označimo sa x broj stanovnika u prošloj godini. Prema uvjetu zadatka imamo:

$$x + 5‰(x) = 5040$$
$$x + \frac{5}{1000} \cdot x = 5040$$
$$x + 0.005x = 5040$$
$$1.005x = 5040$$
$$x = 5014.93$$

$5040 - 5014.93 = 25.07$ pa je grad dobio 25 novih stanovnika.

2.6. RAČUN SMJESE

U praksi se često susrećemo s problemom miješanja dviju ili više tvari pod određenim uvjetima. Ako uvedemo oznake:

x … masa (volumen) prve tvari koje miješamo
y … masa (volumen) druge tvari koje miješamo
$x + y$ … masa mješavine
a … svojstvo (cijena, gustoća, temperatura, kiselost, postotak Alkohola, slanost, čistoća i dr.) prve tvari
b … svojstvo druge tvari
c … svojstvo mješavine

tada je **formula računa smjese**:

$$c = \frac{a \cdot x + b \cdot y}{x + y}.$$

formula računa smjese

Primjer 1. Koliki je postotak alkohola koji se dobije miješanjem 20 litara 90%-tnog alkohola i 30 litara 40%-tnog alkohola?

Ispišemo li podatke prema uvedenim oznakama: $x = 20$, $a = 90$, $y = 40$ i $b = 40$, dobivamo: $c = \frac{90 \cdot 20 + 40 \cdot 30}{50} = 60$, tj. dobije se 50 litara 60%-tnog alkohola.

Primjer 2. Morska voda sadrži 3% soli. Koliko litara slatke vode treba dodati u 40 litara morske vode da bi slanost mješavine bila 2%?

Sada imamo $x = 40$, $a = 3$, $b = 0$ i $c = 2$. Uvrštavanjem u formulu računa smjese dobivamo:

$$2 = \frac{3 \cdot 40 + 0 \cdot y}{40 + y}$$
$$2 \cdot (40 + y) = 120$$
$$2y = 40$$
$$y = 20$$

Treba dodati 20 litara slatke vode.

Primjer 3. Od srebra čistoće 550‰ i čistoće 880‰ potrebno je napraviti medalju mase 132 grama čistoće 750‰. Koliko je potrebno srebra i koje čistoće da se udovolji narudžbi?

$a = 550$, $b = 880$, $c = 750$ i $x + y = 132$. Uvrštavanjem u formulu računa smjese dobivamo:

$$750 = \frac{550 \cdot x + 880 \cdot y}{132},$$

Što zajedno s $x + y = 132$ daje sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} x + y = 132 \\ 750 = \dfrac{550x + 880y}{132} \end{cases}.$$

Rješenje sustava je $x = 52$ i $y = 80$.
Potrebno je 52 g srebra čistoće 550‰ i 80 g srebra čistoće 880‰.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Pojednostavi omjere:
   a) $5\frac{2}{3}:3\frac{1}{6}=$
   b) $0.0025:0.01:0.125=$

2. Izračunaj nepoznati član razmjera:
   a) $(x-1):4=(3x-4):11$
   b) $\left(\frac{1}{2}x-2\right):\left(3+\frac{3}{2}x\right)=\frac{2}{3}:\frac{3}{4}$

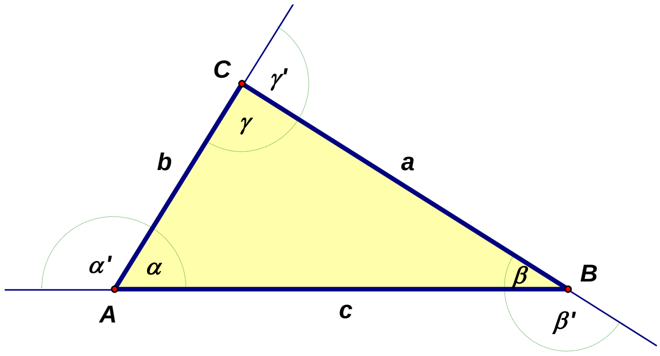
3. Nakon što vijak zavrnemo 16 puta, on će u drveni stup ući 4 cm. Vijak ima duljinu 7.5 cm. Koliko ga najmanje puta moramo zavrnuti kako bi cijeli bio u stupu? Koliko je duboko vijak u stupu nakon što ga zavrnemo 10 puta?
4. Odredi mjere unutarnjih kutova trokuta ako se one odnose kao 4 : 7 : 9.
5. Jedna cijev napuni bazen za 6 sati, a druga za 9 sati. Za koje bi vrijeme cijevi napunile bazen ako ga pune istovremeno?
6. Iz bačve je napunjeno 150 jednakih boca jabučnog soka, nakon čega je bačva ostala prazna. U svaku bocu stane 0.5 litre soka. Koliko bi se boca od 0.75 litre moglo napuniti iz te bačve?
7. Za popločavanje jedne prostorije potrebno je 700 komada kvadratnih pločica stranice duljine 6 cm. Koliko je kvadratnih pločica stranice duljine 8 cm potrebno za popločavanje iste prostorije?
8. Da bi sazidali neki zid, 30 radnika treba raditi 28 dana. Nakon 10 dana poslu se pridružilo još 6 radnika. Za koliko je dana ukupno sazidan taj zid?
9. Trgovac je kupio kamion jabuka za 52470 kuna. Trećinu jabuka prodao je uz zaradu 15%, četvrtinu uz zaradu 9%, šestinu uz zaradu 5%, a ostalo uz gubitak od 8%. Kolika je zarada tog trgovca?
10. U dvije se prodavaonice neki proizvod prodavao po cijeni 120 kuna. Nakon nekog vremena u prvoj je prodavaonici cijena povišena 11%, a zatim još 14%, a u drugoj je prodavaonici cijena odmah povišena 25%. Ima li razlike u cijeni i za koliko?
11. Koji broj umanjen za 17% daje 498?
12. Bronca je legura bakra i kositra. Gustoća bakra je $\rho_{Cu}=8900$ kg/m³, a gustoća kositra je $\rho_{Sn}=7300$ kg/m³. Brončani spomenik ima masu od 1 tone. U spomenik je ugrađeno 740 kg bakra, a ostalo je kositar. Kolika je gustoća bronce?
13. Koliko litara vode temperature 10°C treba pomiješati s 2 litre vode temperature 48°C ako želimo dobiti vodu temperature 30°C?
14. Iz dvije vrste zlata čistoće 900 i 650 potrebno je načiniti smjesu zlata čistoće 750. Koliko grama je potrebno uzeti od svake vrste zlata?

3. TROKUT

Kada proučite nastavne cjeline TROKUT, ČETVEROKUT, KRUG I KRUŽNICA, moći ćete odgovoriti na pitanja:
Kako definiramo ravninske likove? Kako računamo njihove opsege i površine? Gdje ih susrećemo u svakodnevnom životu?

3.1. TROKUT

Neka su A, B i C tri točke ravnine koje ne leže na istom pravcu.



Dio ravnine omeđen dužinama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$, uključujući i te dužine naziva se **trokut**.
Točke A, B i C **vrhovi** su trokuta, a dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ **stranice** trokuta.

trokut

vrhovi

stranice

kutovi

Duljine stranica označavamo s $a=|BC|$, $b=|AC|$ i $c=|AB|$.
Zbroj duljina bilo kojih dviju stranica trokuta veći je od duljine treće stranice.

Mjere unutarnjih kutova trokuta označavamo s $\alpha=|\angle CAB|$, $\beta=|\angle ABC|$ i $\chi=|\angle BCA|$, a mjere vanjskih kutova trokuta s α', β' i χ'.
Zbroj mjera unutarnjih kutova trokuta je 180°, tj. $\alpha+\beta+\chi=180°$.
Zbroj mjera vanjskih kutova trokuta je 360°, tj. $\alpha'+\beta'+\chi'=360°$.

3.2. VRSTE TROKUTA

vrste trokuta

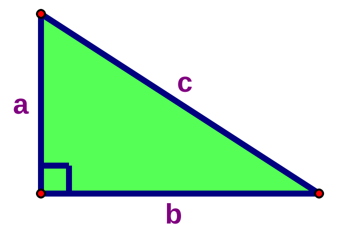
Vrste trokuta:

- s obzirom na duljine stranica: raznostraničan, jednakokračan i jednakostraničan
- s obzirom na mjere unutarnjih kutova: šiljastokutan, pravokutan i tupokutan.

3.2.1. PRAVOKUTAN TROKUT

pravokutan trokut

Kažemo da je trokut **pravokutan** ako ima jedan pravi kut.

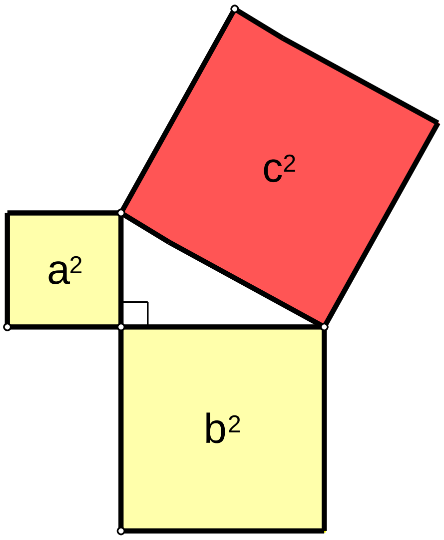


katete

Stranice pravokutnog trokuta koje zatvaraju pravi kut nazivaju se **katete**.

hipotenuta

Stranica nasuprot pravome kutu naziva se **hipotenuza**.



Pitagorin poučak

Za pravokutan trokut vrijedi **Pitogorin poučak** koji glasi:
Površina kvadrata nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka je zbroju površina kvadrata nad njegovim kateta.

Formulom to zapisujemo: $c^2 = a^2 + b^2$, gdje su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta.

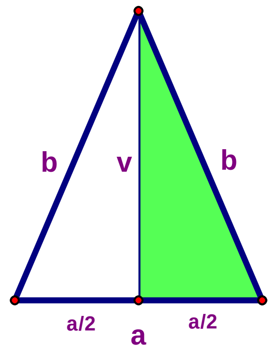
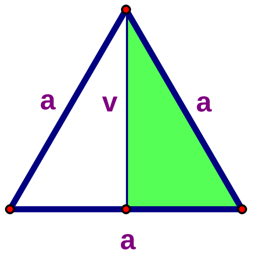
Uz uobičajene oznake, formula za opseg pravokutnog trokuta glasi $o = a + b + c$, a za njegovu površinu $P = \dfrac{a \cdot b}{2}$.

Primjer 1. Izračunaj opseg i površinu pravokutnog trokuta ako su duljine njegovih kateta 16 cm i 30 cm.

Budući da su zadane duljine kateta, površinu zadanog trokuta računamo pomoću formula: $P = \dfrac{a \cdot b}{2} = \dfrac{16 \cdot 30}{2} = 240$ cm² .
Primjenom Pitagorina poučka računamo duljinu hipotenuze:
$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16^2 + 30^2} = \sqrt{1156} = 34$ cm. Zato je opseg
$o = a + b + c = 16 + 30 + 34 = 80$ cm.

Primjer 2. Ljestve dužine 5 m naslonjene su na zid. Do koje visine dosežu ljestve ako je udaljenost ljestava i dna zida 3 m?

Ljestve prislonjene na zid čine pravokutan trokut u kojemu je zadana duljina hipotenuze (5m) i duljina jedne katete (3m). Primjenom Pitagorina poučka

računamo duljinu druge katete: $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$ cm. Dobiveni pravokutni trokut stranica duljina 3, 4 i 5 naziva se **egipatski trokut**. Pomoću njega su stari Egipćani na terenu određivali pravi kut .	***egipatski trokut***
### *3.2.2. JEDNAKOKRAČAN TROKUT*	
Kažemo da je trokut **jednakokračan** ako su mu dvije stranice jednake duljine.	***jednakokra-čan trokut***
 Stranice jednake duljine nazivaju se **kraci**, a treća stranica **osnovica** jednakokračnog trokuta. Označimo s a duljinu osnovice, a s b duljinu kraka jednakokračnog trokuta. Tada opseg računamo po formuli: $o=a+2b$, a površinu po formuli $P=\dfrac{a\cdot v}{2}$. Primjenom Piragorina poučka na istaknuti pravokutan trokut dobivamo: $b^2=v^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$.	***kraci*** ***osnovica***
Primjer 1. Izračunaj površinu jednakokračnog trokuta ako je njegov opseg 40 dm, a duljina kraka 149 cm. Nakon pretvorbe mjernih jedinica, uvrštavanjem podataka u formulu za opseg dobivamo: $a+2\cdot 149=400$ iz čega slijedi da je duljina osnovice $a=102$ cm. Primjenom Pitagorina poučka računamo duljinu visine: $v^2=b^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=149^2-\left(\dfrac{102}{2}\right)^2=19600$ pa je $v=140$ cm. Tražena površina je $P=\dfrac{102\cdot 140}{2}=7140$ cm².	
### *3.2.3. JEDNAKOSTRANIČAN TROKUT*	
Kažemo da je trokut **jednakostraničan** ako su mu sve stranice jednake duljine.	***jednako-straničan trokut***
 Neka je a duljina stranice jednastraničnog trokuta. Primjenom Pitagorina poučka na istaknuti pravokutni trokut najprije računamo duljinu visine: $v^2=a^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=\dfrac{3a^2}{4}$, tj. $v=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Opseg računamo po formuli: $o=3a$, a površinu po formuli $P=\dfrac{a\cdot v}{2}=\dfrac{a\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{4}}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.	

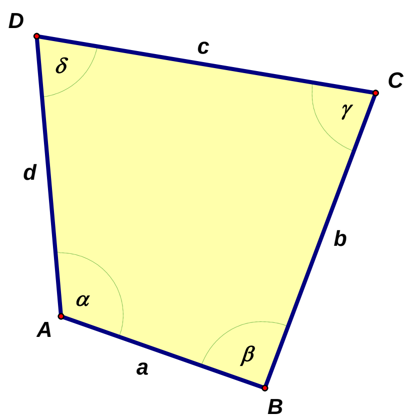
Primjer 1. Izračunaj opseg i duljinu visine jednakostraničnog trokuta ako je njegova površina $16\sqrt{3}$ cm².

Iz formule za površinu računamo duljinu njegove stranice: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=16\sqrt{3}$ iz čega slijedi da je $a=8$ cm. Opseg zadanog trokuta je $o=3\cdot 8=24$ cm, a duljina visine $v=\frac{8\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$ cm.

4. ČETVEROKUT

4.1. ČETVEROKUT

Četverokut je dio ravnine omeđen s četiri dužine. *četverokut*



Točke A, B, C i D **vrhovi** su četverokuta, a dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ **stranice** četverokuta. Duljine stranica označavamo s $a=|AB|$, $b=|BC|$, $c=|CD|$ i $d=|AD|$. Mjere unutarnjih kutova četverokuta označavamo s $\alpha=|\angle DAB|$, $\beta=|\angle ABC|$, $\chi=|\angle BCD|$ i $\delta=|\angle CDA|$.

vrhovi

stranice

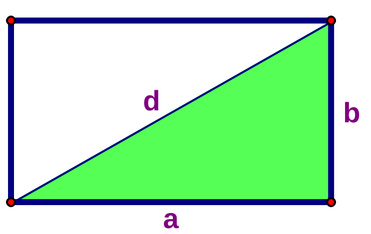
kutovi

Zbroj mjera unutarnjih kutova četverokuta je 360°, tj. $\alpha+\beta+\chi+\delta=360°$. Dužine koje spajaju nasuprotne vrhove četverokuta nazivaju se dijagonale četverokuta. Dijagonale četverokuta na slici su $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$.

.

4.2. VRSTE ČETVEROKUTA

4.2.1. PRAVOKUTNIK



Pravokutnik je četverokut kojemu su svi kutovi pravi. *pravokutnik*

Označimo li s a i b duljine stranica pravokutnika, tada njegov opseg računamo po formuli $o=2a+2b$, a formula za njegovu površinu: $P=a\cdot b$.

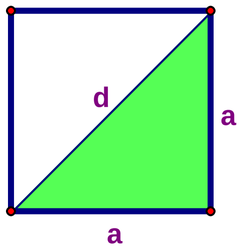
Primjenom Pitagorina poučka na istaknuti pravokutni trokut dobivamo da je duljina dijagonale pravokutnika $d=\sqrt{a^2+b^2}$.

Primjer 1. Izračunaj opseg i duljinu dijagonale pravokutnika ako je njegova površine 48 cm², a duljina jedne njegove stranice 0.06 m.

Nakon pretvorbe mjernih jedinica, uvrštavanjem podataka u formulu za površinu dobivamo: $6b=48$ iz čega slijedi da je duljina stranice $b=8$ cm. Sada je opseg pravokutnika $o=2\cdot6+2\cdot8=28$ cm, a duljina dijagonale $d=\sqrt{6^2+8^2}=10$ cm.

4.2.2. KVADRAT

Kvadrat je pravokutnik kojemu su stranice jednake duljine. *kvadrat*



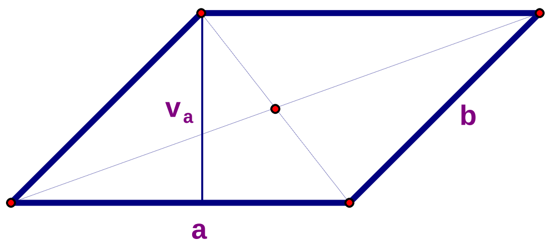
Označimo li s a duljinu stranice kvadrata dobivamo da je njegov opseg $o=4a$, površina $P=a^2$, a duljina njegove dijagonale $d=a\sqrt{2}$.

Primjer. Izračunaj opseg i površinu kvadrata kojemu je duljina dijagonale $\sqrt{50}$ cm.

Iz formule za duljinu dijagonale kvadrata računamo duljinu stranice a: $a\sqrt{2}=\sqrt{50}$, odnosno $a=5$ cm pa je opseg kvadrata $o=20$ cm, a površina $P=25$ cm².

4.2.3. PARALELOGRAM

Paralelogram je četverokut kojemu su po dvije nasuprotne stranice paralelne. *paralelogram*



Svojstva paralelograma: *svojstva paralelograma*

1. Nasuprotne stranice paralelograma međusobno su jednake duljine.
2. Nasuprotni kutovi paralelograma jednakih su mjera, a zbroj veličina

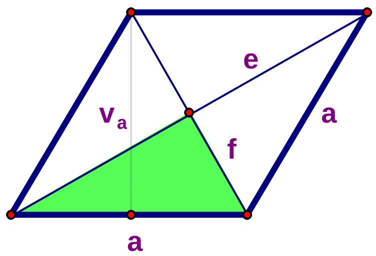
njihovih mjera je 180°.
3. Duljine paralelograma međusobno se raspolavljaju.

Ako sa a i b označimo duljine stranica paralelograma a s v_a duljinu visine paralelograma na stranicu a, odnosno s v_b duljinu visine na stranicu b, tada vrijedi formula za njegov opseg $o = 2a + 2b$ i površinu $P = a \cdot v_a = b \cdot v_b$.

4.2.4. ROMB

Romb je paralelogram kojemu su sve stranice jednake duljine. ***romb***

Uz navedena svojstva paralelograma, za romb vrijedi još jedno bitno svojstvo: Dijagonale romba međusobno su okomite.



Neka je a duljina stranice romba, a e i f duljine njegovih dijagonala.

Opseg romba je $o = 4a$. Budući da je romb dijagonalama podijeljen na četiri sukladna pravokutna trokuta, dolazimo do formule za njegovu površinu $P = 4 \cdot \frac{\frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2}}{2} = \frac{e \cdot f}{2}$.

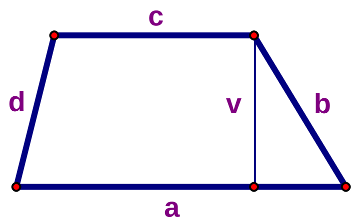
Romb je paralelogram pa njegovu površinu možemo računati i po formuli $P = a \cdot v_a$. Odabir formule ovisi o ulaznim podacima.
Iz istaknutog pravokutnog trokuta slijedi veza između duljine stranice i duljina dijagonala romba: $a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2$.

Primjer. Izračunaj površinu romba ako je njegov opseg 200 cm, a duljina jedne njegove dijagonale 28 cm.

Najprije iz formule za opseg računamo duljinu stranice romba: $4a = 200$ iz čega slijedi $a = 50$ cm. Dalje primjenom Pitagorina poučka računamo duljinu druge dijagonale: $\left(\frac{f}{2}\right)^2 = 50^2 - \left(\frac{28}{2}\right)^2 = 2304$, odnosno $f^2 = 9216$ pa je duljina druge dijagonale 96 cm. Površina romba je $P = \frac{28 \cdot 96}{2} = 1344$ cm².

5.3.5. TRAPEZ

Trapez je četverokut kojemu su dvije stranice paralelne. ***trapez***



Paralelne stranice nazivamo **osnovice** trapeza, a preostale dvije **kraci** trapeza.

osnovice

kraci

Neka su a i c duljine osnovica trapeza, b i d duljine krakova trapeza i v duljina visine trapeza. Tada vrijedi:

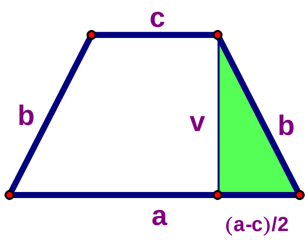
$o = a + b + c + d$ i $P = \frac{a+c}{2} \cdot v$.

Trapez kojemu su kraci jednake duljine nazivamo **jednakokračan trapez**.

jednakokračan trapez

Primjer. Izračunajmo površinu jednakokračnog trapeza ako su duljine njegovih osnovica 22 cm i 12 cm, a njegov opseg 60 cm.

Iz formule za opseg jednakokračnog trapeza $o = a + 2b + c$ slijedi $22 + 2b + 12 = 60$, odnosno duljina kraka je $b = 13$ cm.

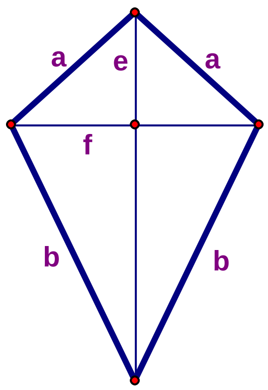


Primjenom Pitagorina poučka na istaknuti pravokutan trokut računamo duljinu visine zadanog trapeza:

$v^2 = b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = 13^2 - \left(\frac{22-10}{2}\right)^2 = 144$ pa je $v = 12$ cm.

Sada računamo površinu $P = \frac{22+12}{2} \cdot 12 = 204$ cm².

5.3.5. DELTOID



Deltoid je četverokut kojemu su dijagonale međusobno okomite, a njihovo sjecište polovište je jedne od njih.

deltoid

Opseg deltoida računamo po formuli $o = 2a + 2b$, a njegovu površinu po formuli $P = \frac{e \cdot f}{2}$.

5. KRUG I KRUŽNICA

5.1. KRUG I KRUŽNICA

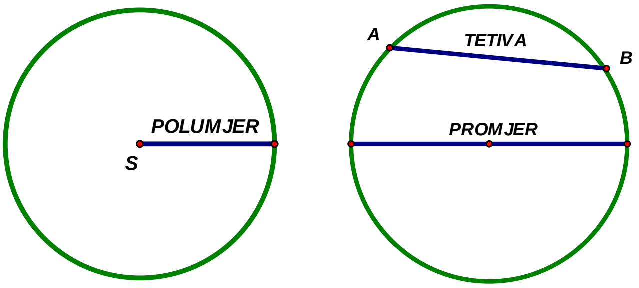
Kružnica je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od zadane točke S. Točku S nazivamo **središte** kružnice.

Krug je dio ravnine omeđen kružnicom.

kružnica

središte

krug



Polumjer (radijus) kružnice je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom na kružnici. Duljinu polumjera označavamo s r.

Tetiva kružnice je dužina koja spaja bilo koje dvije točke kružnice.
Najdulja tetiva prolazi središtem kružnice i naziva se **promjer (dijametar)** kružnice. Duljinu promjera označavamo s d.
Promjer kružnice dvostruko je veći od njezina polumjera, tj. $d = 2r$.

polumjer

tetiva

promjer

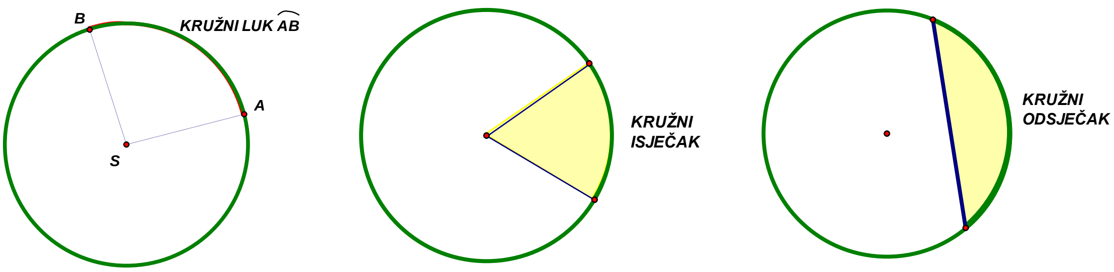
Opseg kruga polumjera duljine r računamo po formuli $o = 2r\pi$, a površinu $P = r^2\pi$.

Kružni luk je dio kružnice između dviju točaka te kružnice.
Kružni isječak je dio kruga omeđen kružnim lukom i dvama polumjerima.
Kružni odsječak omeđen kružnim lukom i tetivom.

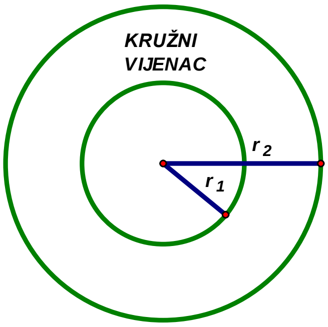
kružni luk

kružni isječak

kružni odsječak



Krajnje točke promjera kružnice dijele kružnicu na dvije **polukružnice**. Promjer dijeli krug na dva **polukruga**.



Kružnice koje imaju zajedničko središte nazivaju se **koncentrične kružnice**.
Kružni vijenac je dio ravnine omeđen dvjema koncentričnim kružnicama.

koncentrične kružnice

kružni vijenac

Opseg kružnog vijenca: $o = o_1 + o_2 = 2\pi(r_1 + r_2)$.
Površina kružnog vijenca: $P = P_2 - P_1 = \pi(r_2^2 - r_1^2)$.

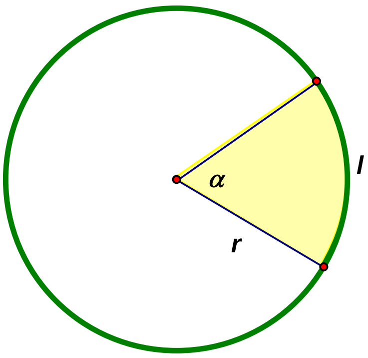
Primjer. Opsezi dviju koncentričnih kružnica su 21.98 cm i 31.4 cm. Izračunaj površinu kružnog vijenca određenog tim kružnicama.

Iz podataka o opsezima dviju kružnica nalazimo duljine njihovih polumjera: $2r\pi = 21.98$ iz čega slijedi da je duljina polumjera manje kružnice $r_1 = 3.5$ cm. Slično dobivamo $r_2 = 5$ cm. Površina kružnog vijenca jednaka je $P = \pi(r_2^2 - r_1^2) = \pi(5^2 - 3.5^2) = 40.06$ cm².

5.2. DULJINA KRUŽNOG LUKA I POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA

središnji kut

Kut kojemu je vrh na središtu kružnice nazivamo **središnji kut**.



Označimo s l duljinu kružnog luka, s r duljinu polumjera kružnice, a s α mjeru središnjeg kuta. Ako kružnim lukom smatramo cijelu kružnicu, onda je mjera njemu pripadnog središnjeg kuta $\alpha = 360°$, a $l = 2r\pi$. Stoga je duljina kružnog luka koji pripada kutu mjere $\alpha = 1°$ jednaka $l = \frac{2r\pi}{360°}$.
Iz toga zaključujemo da je duljina kružnog luka, koji pripada središnjem kutu mjere α: $l = \frac{r\pi\alpha}{180°}$.

Slično, zaključujemo da i površina kružnog isječka ovisi o mjeri središnjeg kuta. Za kut $\alpha = 360°$ pripadni kružni isječak je cijeli krug površine $r^2\pi$. Za kut mjere $\alpha = 1°$ površina pripadnog kružnog isječka je $P = \frac{r^2\pi}{360°}$. Za kut mjere α površina kružnog isječka je $P = \frac{r^2\pi\alpha}{360°}$.

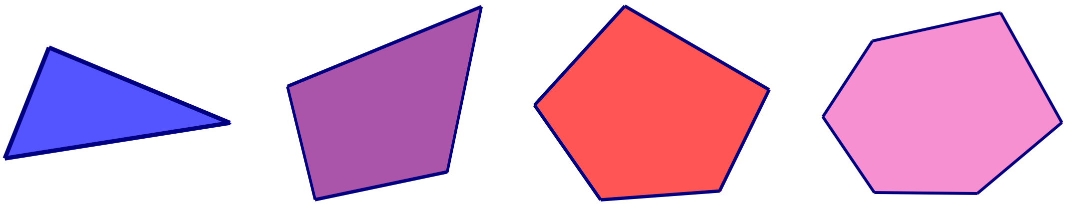
Formulu možemo napisati i u drugom obliku: $P = \frac{r \cdot l}{2}$.

Primjer. Iz kruga s opsegom 157 cm izrezan je kružni isječak čija je površina 686.857 cm². Koliki je središnji kut tog isječka?

Iz opsega kruga računamo duljinu polumjera $r = 24.98$ cm, a onda iz formule za površinu kružnog isječka nalazimo: $\frac{24.98^2 \pi\alpha}{360°} = 686.857$, tj. $\alpha = 126°$.

5.3. MNOGOKUTI

Geometrijski likovi na slici primjeri su mnogokuta:



Mnogokut je dio ravnine omeđen dužinama. *mnogokut*

***n*-terokut** je mnogokut koji ima n vrhova, n stranica i n kutova. *n-terokut*

Dijagonala mnogokuta je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha mnogokuta. *dijagonala*

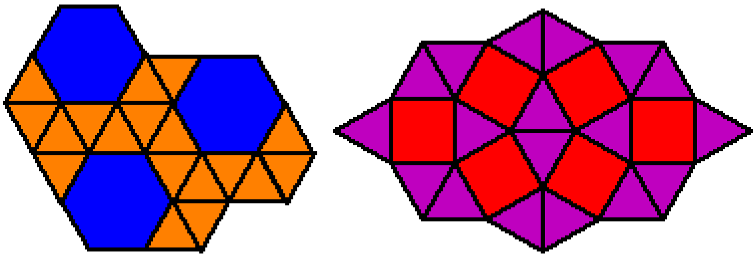
Broj dijagonala koje možemo nacrtati iz jednog vrha n-terokuta je $n-3$.
Ukupan broj dijagonala n-terokuta je $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$.
Zbroj mjera unutarnjih kutova mnogokuta je $(n-2) \cdot 180°$.

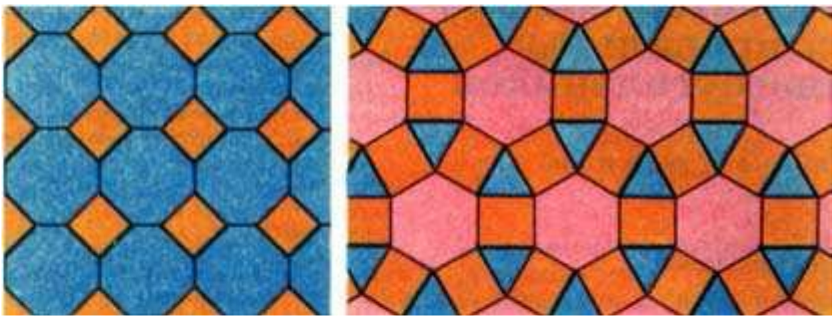
Primjer. Koliko se ukupno može nacrtati dijagonala u mnogokutu kojemu je zbroj mjera svih unutarnjih kutova jednak 2880°?

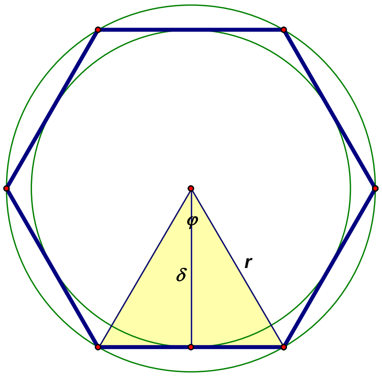
Iz podatka o zbroju mjera svih unutarnjih kutova, nalazimo najprije o kojem je mnogokutu riječ: $(n-2) \cdot 180° = 2880°$ iz čega slijedi $n = 18$. Ukupan broj dijagonala osamnaesterokuta je: $\frac{18 \cdot (18-3)}{2} = 135$.

Kažemo da je **mnogokut pravilan** ako su sve njegove stranice jednake duljine i svi unutarnji kutovi imaju jednake mjere. *pravilan mnogokut*

Na slikama su primjeri popločavanja pravilnim mnogokutima (jednakostraničan trokut, kvadrat, pravilan peterokut, pravilan šesterokut…).







Pravilnom mnogokutu možemo opisati i upisati kružnicu. Središte tih kružnica naziva se **središte mnogokuta**.
Jednakokračan trokut kojemu su dva vrha susjedni vrhovi mnogokuta, a treći vrh središte mnogokuta naziva se **karakterističan trokut**. **Središnji kut** je kut karakterističnog trokuta s vrhom u središtu mnogokuta. Njegova mjera je n-ti dio punog kuta: $\varphi = \frac{360°}{n}$.

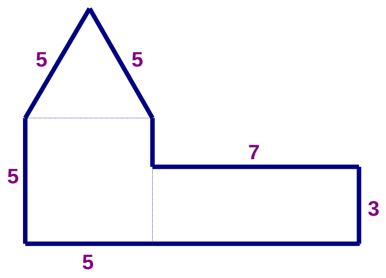
karakteri-stičan trokut

Duljina kraka karakterističnog trokuta jednaka je duljini polumjera mnogokutu opisane (r), a duljina njegove visine duljini mnogokutu upisane kružnice (ρ).

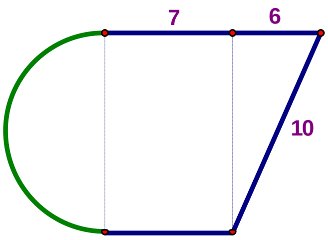
ZADACAI ZA VJEŽBU:

1. Izračunaj opseg i površinu kvadrata ako je duljina njegove dijagonale $\sqrt{72}$ cm.
2. Izračunaj opseg i površinu pravokutnika ako je duljina jedne njegove stranice 39 cm , a duljina dijagonale 0.89m.
3. Izračunaj opseg i duljinu visine jednakostraničnog trokuta ako je njegova površina $\sqrt{48}$ cm2.
4. Izračunaj površinu jednakokračnog trokuta ako je njegov opseg 3.92 m, a duljina osnovice 52 cm.
5. Izračunaj površinu romba ako je njegov opseg 260 cm, a duljina jedne njegove dijagonale 32 cm.
6. Izračunaj površinu jednakokračnog trapeza ako je njegov opseg 134 cm, a duljine njegovih osnovica 42 cm i 18 cm.
7. Opsezi dviju koncentričnih kružnica su 4521.6 mm i 339.12 cm. Izračunaj površinu kružnog vijenca određenog tim kružnicama.
8. Iz kruga s opsegom 942 mm izrezan je kružni isječak čija je površina 188.4 cm2.Koliki je središnji kut tog isječka?
9. Koliki je zbroj mjera unutarnjih kutova mnogokuta ako se u tom mnogokutu može nacrtati ukupno 20 dijagonala?
10. U kružnicu polumjera 4.5 cm upisan je pravilan mnogokut. Duljina kružnog luka nad njegovom stranicom je 3.14 cm. Koji je to mnogokut?
11. Izračunaj opseg i površinu likova sa slike:

a)



b)



6. SKUP KOMPLEKSNIH BROJEVA

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:
1. *Zbog čega proširujemo skup realnih brojeva?*
2. *Što je skup kompleksnih brojeva? Kako operiramo u skupu kompleksnih brojeva?*

6.1. SKUP KOMPLEKSNIH BROJEVA

Jednadžba $x^2 = -1$ u skupu realnih brojeva nema rješenja. Naime, ne postoji realni broj x sa svojstvom da je njegov kvadrat jednak -1. Za svaki realan broj x vrijedi da je $x^2 \geq 1$. Nameće se potreba da skup realnih brojeva proširimo tako da jednadžba $x^2 = -1$, i njoj slične jednadžbe $x^2 = -5$, $x^2 = -\frac{1}{4}$, u proširenom skupu imaju rješenja.

Skup koji je proširenje skupa realnih brojeva i u kojem jednadžba $x^2 = -1$ ima rješenje, označit ćemo sa **C** i nazvati **skupom kompleksnih brojeva**. Da bismo proširili skup realnih brojeva, potrebno je riješiti jednadžbu $x^2 = -1$. U tu svrhu ćemo broj čiji je kvadrat jednak -1 označiti s i, tj. $i^2 = -1$.
Broj označen s $i = \sqrt{-1}$ naziva se **imaginarna jedinica**.

imaginarna jedinica

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $\sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$

b) $\sqrt{-\frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} \cdot \sqrt{-1} = \frac{5}{3}i$

Primjer 2. Riješimo spomenute jednadžbe:

a) $x^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{-1} \quad \Rightarrow \quad x_1 = i,\ x_2 = -i$

b) $x^2 = -5 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{-5} \quad \Rightarrow \quad x_1 = i\sqrt{5},\ x_2 = -i\sqrt{5}$

c) $x^2 = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}i\,,\ x_2 = -\frac{1}{2}i$

Brojeve oblika bi, gdje je b realni broj, a i imaginarna jedinica nazivamo **imaginarnim brojevima**.

imaginarni brojevi

Kako je skup kompleksnih brojeva proširenje skupa realnih brojeva, on mora sadržavati realne brojeve. Želimo li da računske operacije naslijede svojstva računskih operacija u skupu realnih brojeva, dolazimo do oblika kompleksnog broja koji će ispunjavati navedene zahtjeve.

Kompleksan broj je broj oblika $z = a + bi$, gdje su a i b realni brojevi. Oblik $a + bi$ nazivamo **standardni** ili **algebarski oblik kompleksnog broja**.

standardni oblik komple-ksnog broja

U kompleksnom broju $z = a + bi$ realni broj a je njegov **realni dio**, a realni broj b njegov **imaginarni dio**. Oznake:

$$a = \mathrm{Re}(z)$$
$$b = \mathrm{Im}(z).$$

realni dio

imaginarni dio

Primjer 1. Odredimo realni i imaginarni dio sljedećih kompleksnih brojeva:

a) $z = -2 + 5i$	$\mathrm{Re}(z) = -2$	$\mathrm{Im}(z) = 5$
b) $z = \frac{1}{2} - 3i$	$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$	$\mathrm{Im}(z) = -3$
c) $z = -1 - \sqrt{2}i$	$\mathrm{Re}(z) = -1$	$\mathrm{Im}(z) = -\sqrt{2}$
d) $z = 0.25 + i$	$\mathrm{Re}(z) = 0.25$	$\mathrm{Im}(z) = 1$
e) $z = -i + 4$	$\mathrm{Re}(z) = 4$	$\mathrm{Im}(z) = -1$
f) $z = \frac{1}{4}i$	$\mathrm{Re}(z) = 0$	$\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{4}$
g) $z = 1.5$	$\mathrm{Re}(z) = 1.5$	$\mathrm{Im}(z) = 0$

Kriterij jednakosti dvaju kompleksnih brojeva:
Dva su kompleksna broja $z_1 = a_1 + b_1 i$ i $z_2 = a_2 + b_2 i$ ako i samo ako su im jednaki realni i jednaki imaginarni dijelovi, tj:

kriterij jednakosti

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \ \text{ i } \ b_1 = b_2$$

Primjer 2. Odredimo realne brojeve x i y tako da vrijedi zadana jednakost:

a) $(1 + x) + (y - 2)i = -3 + 4i$

Kompleksni brojevi su jednaki ako su im jednaki realni i jednaki imaginarni dijelovi. Dakle,

$$1 + x = -3 \ \text{ i } \ y - 2 = 4,$$

odnosno $x = -4$ i $y = 6$.

b) $-3x + 2xi + 4y - yi = -9 - 4i$

Kompleksni broj na lijevoj strani jednakosti zapišemo najprije u standardnom obliku: $(-3x+4y)+(2x-y)i=-9-4i$, a onda prema kriteriju jednakosti dvaju kompleksnih brojeva dobivamo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} -3x+4y=-9 \\ 2x-y=-4 \end{cases}$$

čije je rješenje $x=-5$ i $y=-6$.

6.2. ZBRAJANJE I ODUZIMANJE KOMPLEKSNIH BROJEVA

Shvatimo li kompleksne brojeve kao binome lako ih zbrajamo, oduzimamo i množimo.

Kompleksne brojeve zbrajamo (oduzimamo) tako da im posebno zbrojimo (oduzmemo) realne, a posebno imaginarne dijelove.

Primjer 1. Izračunajmo z_1+z_2 i z_1-z_2 ako je:

a) $z_1=2-5i$ i $z_1=3+i$

$$z_1+z_2=(2-5i)+(3+i)=2-5i+3+i=5-4i$$
$$z_1-z_2=(2-5i)-(3+i)=2-5i-3-i=-1-6i$$

b) $z_1=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i$ i $z_1=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}i$

$$z_1+z_2=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}i\right)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}i=\frac{7}{6}+\frac{7}{12}i$$
$$z_1-z_2=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}i\right)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}i=-\frac{1}{6}+\frac{11}{12}i$$

6.3. MNOŽENJE KOMPLEKSNIH BROJEVA

Kompleksne brojeve množimo kao binome u skupu realnih brojeva. Pri tome vrijede poznati zakoni računskih operacija i svojstvo imaginarne jedinice $i^2=-1$.

$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=ac-bd+(ad+bc)i$$

Primjer 1. Izračunajmo $z_1\cdot z_2$ ako je:

a) $z_1=-3i$ i $z_1=5-2i$

$$z_1\cdot z_2=-3i\cdot(5-2i)=-15i+6i^2=-15i+6\cdot(-1)=-6-15i$$

b) $z_1=2-i$ i $z_1=-\frac{1}{2}+4i$

$$z_1\cdot z_2=(2-i)\cdot\left(-\frac{1}{2}+4i\right)=-1+8i+\frac{1}{2}i-4i^2=-1+8i+\frac{1}{2}i-4\cdot(-1)=3+\frac{17}{2}i$$

Primjer 2. Izračunajmo: $(3-i)^2$.

$(3-i)^2=3^2-2\cdot 3\cdot i+i^2=9-6i-1=8-6i$

6.4. DIJELJENJE KOMPLEKSNIH BROJEVA

konjugirano kompleksni brojevi

Dva kompleksna broja koja se razlikuju samo u predznaku imaginarnog dijela nazivaju se **konjugirano kompleksni brojevi**.

Ako je zadan kompleksan broj $z=a+bi$, tada je njemu konjugirano kompleksan broj $\bar{z}=a-bi$, čitamo „z potez“.

Primjer 1. Odredimo konjugirano kompleksan broj zadanog kompleksnog broja:

a) $z=-2+5i$ $\qquad \bar{z}=-2-5i$

b) $z=-i-4$ $\qquad \bar{z}=i-4$

c) $z=\frac{1}{4}i$ $\qquad \bar{z}=-\frac{1}{4}i$

d) $z=1.5$ $\qquad \bar{z}=1.5$

Odredimo sada produkt kompleksnog broja $z=a+bi$ i njemu konjugirano kompleksnog broja $\bar{z}=a-bi$:

$$z\cdot\bar{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2-b^2i^2=a^2+b^2.$$

Primjer 2. Izračunajmo:

a) $(3+2i)\cdot(3-2i)=3^2+2^2=13$

b) $(-5+i)\cdot(-5-i)=(-5)^2+1^2=26$

Kompleksni broj dijelimo realnim brojem tako da njegov realni i njegov imaginarni broj podijelimo tim brojem.

Primjer 3. Izračunajmo: $(-3+6i):(-2)$.

$(-3+6i):(-2)=\frac{-3+6i}{-2}=\frac{-3}{-2}+\frac{6}{-2}i=\frac{3}{2}-3i$.

Dva kompleksna broja dijelimo tako da dijeljenje najprije zapišemo u obliku razlomka. Taj razlomak zatim proširimo množeći njegov brojnik i nazivnik konjugiranim nazivnikom:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{c^2+d^2}$$

Primjer 4. Izračunajmo:

a) $\frac{8-i}{2+i}=\frac{8-i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}=\frac{(8-i)\cdot(2-i)}{(2+i)\cdot(2-i)}=\frac{16-8i-2i+i^2}{2^2+1^2}=\frac{15-10i}{5}=\frac{15}{5}-\frac{10}{5}i=3-2i$

b) $\frac{1}{4-5i}=\frac{1}{4-5i}\cdot\frac{4+5i}{4+5i}=\frac{4+5i}{(4-5i)\cdot(4+5i)}=\frac{4+5i}{4^2+5^2}=\frac{4+5i}{41}=\frac{4}{41}+\frac{5}{41}i$

c) $\frac{3-2i}{i}=\frac{3-2i}{i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{(3-2i)\cdot i}{i^2}=\frac{3i-2i^2}{-1}=\frac{2+3i}{-1}=\frac{2}{-1}+\frac{3}{-1}i=-2-3i$

6.5. APSOLUTNA VRIJEDNOST KOMPLEKSNOG BROJA

apsolutna vrijednost kompleksnog broja

Apsolutna vrijednost (modul) kompleksnog broja $z=a+bi$ je

$$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}\ .$$

Apsolutna vrijednost uvijek je nenegativan realan broj.

Primjer. Izračunajmo apsolutne vrijednosti zadanih kompleksnih brojeva:

a) $z=3+4i$ $\qquad |z|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

b) $z=-2-i$ $\qquad |z|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

c) $z=-5$ $\qquad |z|=\sqrt{(-5)^2+0^2}=5$

d) $z=7i$ $\qquad |z|=\sqrt{0^2+7^2}=\sqrt{49}=7$

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Izračunaj:
   a) $4\sqrt{-2}-6\sqrt{-5}-\left(3\sqrt{-2}-5\sqrt{-5}+\sqrt{-2}\right)=$
   b) $3\sqrt{-7}-4\sqrt{-28}+6\sqrt{-63}=$

2. Odredi realne brojeve x i y tako da vrijedi zadana jednakost:
   a) $(3x+12)+(x-y)i=-4y+10i$
   b) $2x+4xi+y-3yi=4-7i$
   c) $(4-3i)x-(2-5i)y=7$

3. Odredi $\overline{z_2}-z_1$, $\overline{z_1}\cdot z_2$, $3\cdot z_1^2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $|z_1+z_2|$
   a) $z_1=-4+3i$ i $z_2=1+i$
   b) $z_1=-\frac{3}{2}+i$ i $z_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i$

4. Odredi Rez i Imz ako je:
   a) $z=\frac{3-2i}{5i}$

b) $z=\frac{2-4i}{3i}+5-2i$

c) $z=3-4i+\frac{1-2i}{3+4i}$

d) $z=\frac{2+i}{(1-i)\cdot(3+4i)}$

7. KVADRATNA JEDNADŽBA I KVADRATNA FUNKCIJA

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:

1. Što je kvadratna jednadžba i kako rješavamo kvadratnu jednadžbu?
2. Što je graf kvadratne funkcije i kako ga crtamo? Gdje ga nalazimo u svakodnevnom životu?

7.1. KVADRATNA JEDNADŽBA

Jednadžba oblika $ax^2+bx+c=0$ gdje su $a,b,c\in\mathbf{R}$ i $a\neq 0$ naziva se **kvadratna jednadžba**.

kvadratna jednadžba

Zahtjev da je $a\neq 0$ osigurava da jednadžba sadrži x^2. Naime, ako je $a=0$, radi se o linearnoj jednadžbi $bx+c=0$.

Brojevi a, b i c nazivaju se koeficijenti kvadratne jednadžbe.
Koeficijent a nazivamo **kvadratni** ili **vodeći**, koeficijent b **linearni**, a koeficijent c **slobodni** koeficijent.

kvadratni

linearni

slobodni koeficijent

Primjer 1. Odredimo kvadratni, linearni i slobodni koeficijent kvadratne jednadžbe:

jednadžba	kvadratni koeficijent	linearni koeficijent	slobodni koeficijent
a) $2x^2-3x+4=0$	2	-3	4
b) $-x^2+\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}=0$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$
c) $-6.2x^2+x=0$	-6.2	1	0
d) $3x^2-\sqrt{3}=0$	3	0	$-\sqrt{3}$
e) $3-5x+7x^2=0$	7	-5	3

Ako je u kvadratnoj jednadžbi koeficijent b ili c jednak nuli, jednadžbu nazivamo **nepotpuna**.

nepotpuna kvadratna jednadžba

Kvadratna jednadžba kojoj je koeficijent b jednak nuli, tj, jednadžba oblika $ax^2+c=0$ naziva se **čista kvadratna jednadžba**. Rješavamo je tako da najprije slobodni koeficijent c prebacimo na desnu stranu jednadžbe

čista kvadratna jednadžba

$$ax^2=-c\,,$$

a zatim dobivenu jednadžbu podijelimo brojem a:

$$x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Korjenovanjem nalazimo dva rješenja:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Primjer 2. Riješimo čiste kvadratne jednadžbe:

a)
$$x^2 - 9 = 0$$
$$x^2 = 9$$
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{9}$$
$$x_{1,2} = \pm 3$$

b)
$$x^2 + 25 = 0$$
$$x^2 = -25$$
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-25}$$
$$x_{1,2} = \pm 5i$$

Kvadratnu jednadžbu kojoj je slobodni koeficijent c jednak nuli, tj. jednadžba oblika $ax^2 + bx = 0$ naziva se **prikraćena kvadratna jednadžba**. Rješavamo je izlučivanjem nepoznanice x:

prikraćena kvadratna jednadžba

$$x \cdot (ax + b) = 0.$$

Na lijevoj strani dobivamo umnožak faktora x i $(ax + b)$. Umnožak je jednak 0 samo ako je bar jedan od faktora jednak 0:

$$x = 0 \text{ ili } ax + b = 0.$$

Rješavanjem druge jednadžbe nalazimo oba rješenja:

$$x_1 = 0 \text{ ili } x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Primjer 3. Riješimo prikraćene kvadratne jednadžbe:

a)
$$x^2 + 6x = 0$$
$$x(x + 6) = 0$$
$$x = 0 \text{ ili } x + 6 = 0$$
$$x_1 = 0 \text{ ili } x_2 = -6$$

b)
$$3x^2 - \frac{2}{3}x = 0$$
$$x\left(3x - \frac{2}{3}\right) = 0$$
$$x = 0 \text{ ili } 3x - \frac{2}{3} = 0$$
$$x = 0 \text{ ili } 9x - 2 = 0$$
$$x_1 = 0 \text{ ili } x_2 = \frac{2}{9}$$

7.2. FORMULA ZA RJEŠENJA KVADRATNE JEDNADŽBE

Prije rješavanja kvadratne jednadžbe u općem obliku, riješimo ove jednadžbe:

Primjer 1. Riješimo jednadžbu $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Lijeva strana jednadžbe je potpuni kvadrat, tj. $x^2-6x+9=(x-3)^2$, pa jednadžbu možemo napisati u obliku:

$$(x-3)^2=0.$$

Odavde je $x-3=0$, odnosno $x=3$.

Primjer 2. Riješimo jednadžbu $x^2-10x+21=0$.

Nadopunimo lijevu stranu jednadžbe do punog kvadrata:

$$x^2-10x+5^2-5^2+21=0.$$

Dobivamo:

$$(x-5)^2-25+21=0$$
$$(x-5)^2=4$$
$$x-5=\pm\sqrt{4}$$
$$x-5=\pm 2$$
$$x_1=7 \text{ i } x_2=3$$

Postupkom nadopunjavanja do potpunog kvadrata opće kvadratne jednadžbe, dolazimo do **formule za rješenja kvadratne jednadžbe**:

formula za rješenja kvadratne jednadžbe

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Primjer 3. Riješimo kvadratne jednadžbe:

a) $x^2-8x+7=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot1\cdot7}}{2\cdot1}=\frac{8\pm\sqrt{64-28}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{8\pm6}{2}$$

$$x_1=\frac{8-6}{2}=1 \text{ i } x_2=\frac{8+6}{2}=7.$$

b) $x^2-6x+13=0$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot13}}{2\cdot1}=\frac{6\pm\sqrt{36-52}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{6\pm4i}{2}$$

$$x_1=\frac{6+4i}{2}=3+2i \text{ i } x_2=\frac{6-4i}{2}=3-2i.$$

Primjer 4. Riješimo kvadratne jednadžbe:

a) $\dfrac{x+1}{4x+6}=\dfrac{x-1}{2x+3}$

$$(x+1)(2x+3)=(x-1)(4x+6)$$
$$2x^2+3x+2x+3=4x^2-4x+6x-6$$
$$2x^2-3x-9=0$$
$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-9)}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm 9}{4}$$
$$x_1=\frac{3+9}{4}=3 \text{ i } x_2=\frac{3-9}{4}=-\frac{3}{2}$$

b) $(x+3)^2+(2x+1)^2=(x+4)^2$
$$x^2+6x+9+4x^2+4x+1=x^2+8x+16$$
$$4x^2+2x-6=0$$
$$2x^2+x-3=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2}=\frac{-1\pm 5}{4}$$
$$x_1=\frac{-1+5}{4}=1 \text{ i } x_2=\frac{-1-5}{4}=-\frac{3}{2}.$$

7.3. DISKRIMINANTA KVADRATNE JEDNADŽBE

Pogledamo li formulu za rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2+bx+c=0$:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

možemo uočiti da broj i vrsta rješenja ovisi o predznaku izraza b^2-4ac, koji se nalazi pod korijenom. Taj se izraz naziva **diskriminanta** kvadratne jednadžbe i označava s D.

diskriminanta kvadratne jednadžbe

Diskriminanta kvadratne jednadžbe $D=b^2-4ac$ određuje vrstu rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2+bx+c=0$:

- ako je $D > 0$, jednadžba ima dva različita realna rješenja: $x_1 \neq x_2$
- ako je $D < 0$, jednadžba ima dva konjugirano kompleksna rješenja: $x_1=\overline{x_2}$
- ako je $D = 0$, jednadžba ima jedno (dvostruko) realno rješenje: $x_1=x_2$

Primjer 1. Izračunajmo diskriminantu i odredimo vrstu rješenja kvadratne jednadžbe:

a) $2x^2+5x+3=0$

$D=b^2-4ac=5^2-4\cdot 2\cdot 3=1>0$ jednadžba ima dva različita realna rješenja

b) $2x^2+3x+2=0$

$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -7 < 0$ jednadžba ima dva konjugirano kompleksna rješenja

c) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$ jednadžba ima jedno (dvostruko) realno rješenje

Primjer 2. Odredi realni parametar p tako da jednadžba:

a) $x^2 - 4x + p - 1 = 0$ ima dva različita realna rješenja

Zanima nas kada je $D > 0$.

$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p-1) = 16 - 4p + 4 = 20 - 4p$

$20 - 4p > 0$, $-4p > -20$, $p < 5$.

b) $px^2 + 2x - 4 = 0$ nema realnih rješenja

Ako jednadžba nema realnih rješenja, onda su njezina rješenja konjugirano kompleksni brojevi pa nas zanima kada je $D < 0$.

$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p-1) = 16 - 4p + 4 = 20 - 4p$

$20 - 4p > 0$, $-4p > -20$, $p < 5$.

c) $4px^2 - (4p+2)x + p = 0$ ima jedno dvostruko realno rješenje

$D = b^2 - 4ac = (-(4p+2))^2 - 4 \cdot 4p \cdot p = 16p^2 + 16p + 4 - 16p^2 = 16p + 4$

Zanima nas kada je $D = 0$.

$16p + 4 = 0$, $16p = -4$, $p = -\frac{1}{4}$.

7.4. VIÈTEOVE FORMULE

Vièteove formule jesu formule za zbroj i umnožak rješenja kvadratne jednadžbe:

Vièteove formule

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$x_1, x_2 \ldots$ rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$

Primjer. Ne rješavajući kvadratnu jednadžbu, nađi zbroj i umnožak njezinih rješenja:

a) $5x^2 - x + 2 = 0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{5}$$

b) $4-6x-3x^2=0$

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-6}{-3}=-2$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{4}{-3}=-\frac{4}{3}$$

7.5. GRAF FUNKCIJE $f(x)=a(x-x_0)^2+y_0$

Kvadratna funkcija je funkcija oblika $f(x)=ax^2+bx+c$, gdje su $a,b,c\in\mathbf{R}$ i $a\neq 0$.

kvadratna funkcija

Graf kvadratne funkcije je krivulja koju nazivamo **parabola**. Njezin oblik ovisi samo o kvadratnom koeficijentu a. Linearni koeficijent b i slobodni koeficijent c određuju tek položaj parabole u koordinatnom sustavu.

parabola

Graf kvadratne funkcije $f(x)=ax^2$

Primjer 1. U istom koordinatnom sustavu nacrtajmo grafove kvadratnih funkcija:

a) $f(x)=x^2$
b) $f(x)=2x^2$
c) $f(x)=\frac{1}{2}x^2$
d) $f(x)=-x^2$

Kako bi nacrtali grafove zadanih kvadratnih funkcija, odredimo nekoliko njihovih točaka:

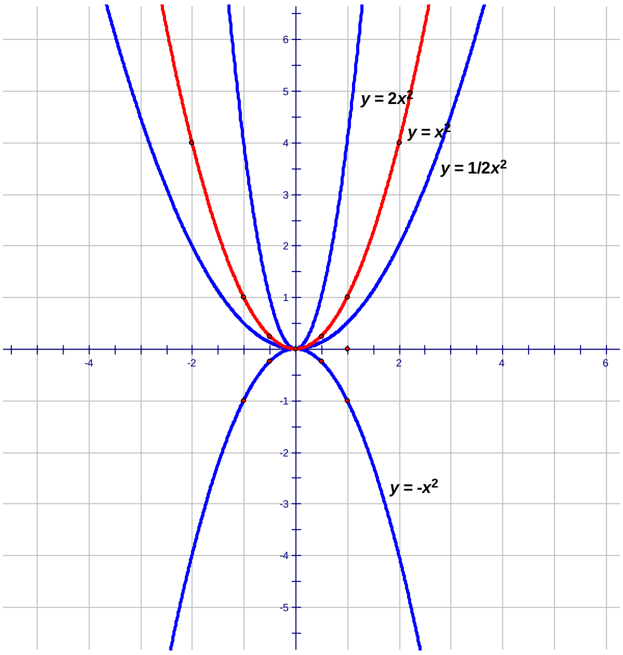
x	0	1	-1	2	-2
$f(x)=x^2$	0	1	1	4	4

x	0	1	-1	2	-2
$f(x)=2x^2$	0	2	2	8	8

x	0	1	-1	2	-2
$f(x)=\frac{1}{2}x^2$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	2

x	0	1	-1	2	-2
$f(x)=-x^2$	0	-1	-1	-4	-4

Ucrtavanjem i spajanjem dobivenih točaka skicirajmo tražene grafove:



Nacrtane parabole simetrične su s obzirom na y-os. To je **os parabole**. *os parabole*
Sve nacrtane parabole prolaze ishodištem koordinatnog sustava. Za prve tri parabole to je najniža, a za treću najviša točka parabole. Tu točku nazivamo **tjeme** parabole. *tjeme*
Sa slike zaključujemo: kada je koeficijent a pozitivan, tada je otvor parabole prema gore, a kada je negativan, otvor parabole je prema dolje.

Graf kvadratne funkcije $f(x)=ax^2+c$

Primjer 2. U istom koordinatnom sustavu nacrtajmo grafove kvadratnih funkcija:

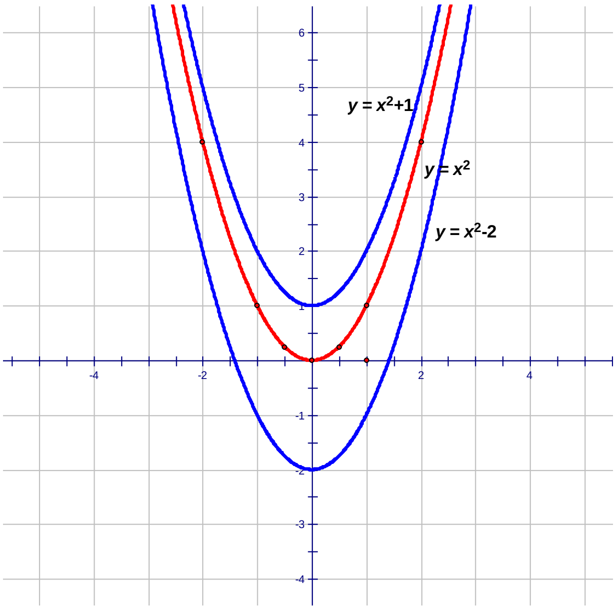
a) $f(x)=x^2$
b) $f(x)=x^2+1$
c) $f(x)=x^2-2$

Kako bi nacrtali grafove zadanih kvadratnih funkcija, odredimo nekoliko njihovih točaka:

x	0	1	-1	2	-2
$f(x)=x^2+1$	1	2	2	5	5

x	0	1	-1	2	-2
$f(x)=x^2-2$	-2	-1	-1	2	2

Ucrtavanjem i spajanjem dobivenih točaka skicirajmo tražene grafove:



Zaključujemo:

Graf kvadratne funkcije $f(x)=ax^2+c$, tj. parabola $y=ax^2+c$, dobije se pomakom parabole $y=ax^2$ za c po y osi i to prema gore ako je $c>0$, a prema dolje ako je $c<0$. Tjeme ove parabole je $T(0,c)$.

Graf kvadratne funkcije $f(x)=a(x-x_0)^2$

Primjer 3. U istom koordinatnom sustavu nacrtajmo grafove kvadratnih funkcija:

a) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$

b) $f(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2$

c) $f(x)=-\frac{1}{2}(x+3)^2$

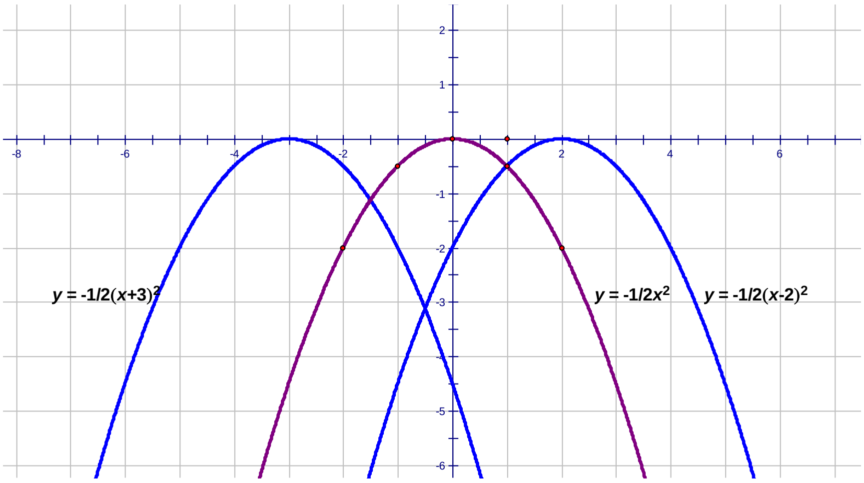
Kako bi nacrtali grafove zadanih kvadratnih funkcija, odredimo nekoliko njihovih točaka:

x	0	1	-1	2	-2
$f(x)=-\frac{1}{2}x^2$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2	-2

x	0	1	2	3	4
$f(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2

x	0	-1	-2	-3	-4	-5
$f(x)=-\frac{1}{2}(x+3)^2$	$-\frac{9}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2

Ucrtavanjem i spajanjem dobivenih točaka skicirajmo tražene grafove:



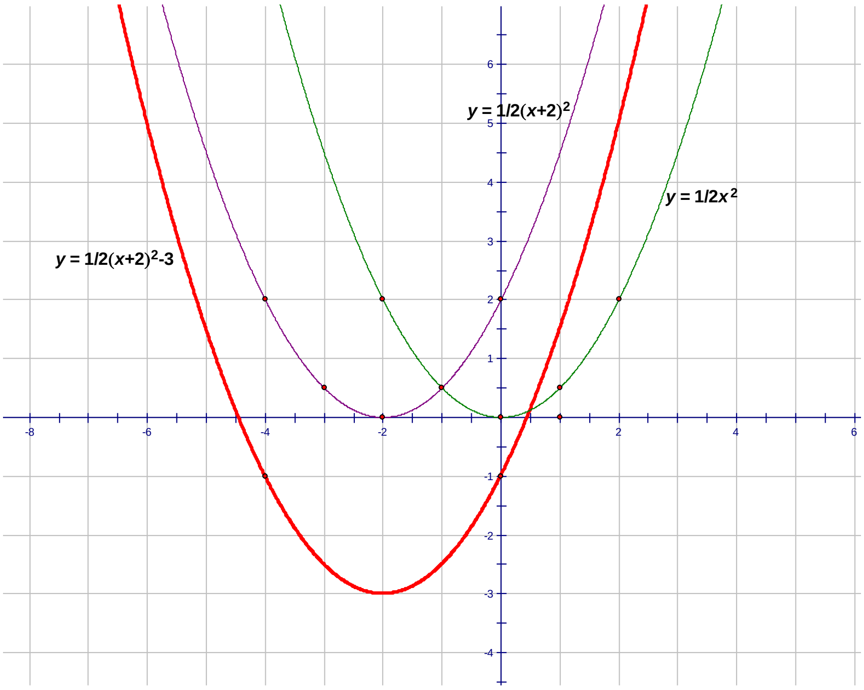
Zaključujemo:

Graf kvadratne funkcije $f(x)=a(x-x_0)^2$, tj. parabola $y=a(x-x_0)^2$, dobije se pomakom parabole $y=ax^2$ za x_0 po x osi udesno ako je $x_0>0$, a ulijevo ako je $x_0<0$. Tjeme ove parabole je $T(x_0,0)$.

Graf kvadratne funkcije $f(x)=a(x-x_0)^2+y_0$

Primjer 4. Nacrtajmo graf kvadratne funkcije $f(x)=\frac{1}{2}(x+2)^2-3$.

Prema prethodnim primjerima zaključujemo da će graf ove funkcije biti parabola dobivena pomakom parabole $y=\frac{1}{2}x^2$ po x osi za 2 ulijevo i po y osi za 3 prema dolje:



Graf kvadratne funkcije $f(x)=a(x-x_0)^2+y_0$, tj. parabola $y=a(x-x_0)^2+y_0$, dobije se pomakom parabole $y=ax^2$ za x_0 po x osi udesno ako je $x_0>0$, a ulijevo ako je $x_0<0$ i po y osi prema gore ako je $y_0>0$, a prema dolje ako je $y_0<0$. Tjeme ove parabole je $T(x_0,y_0)$.

7.6. NULTOČKE KVADRATNE FUNKCIJE

nultočka

Nultočka je točka u kojoj graf funkcije siječe x os, tj. točka u kojoj je vrijednost funkcije jednaka nuli: $y=f(x)=0$.

Nultočke kvadratne funkcije $f(x)=ax^2+bx+c$ rješenja su pripadne kvadratne jednadžbe $ax^2+bx+c=0$. Njezina realna rješenja sjecišta su njezinog grafa s x osi.

Primjer. Odredimo nultočke kvadratnih funkcija:

a) $f(x)=x^2+4x-12$

Rješavamo pripadnu kvadratnu jednadžbu $x^2+4x-12=0$. Njezina rješenja su $x_1=2$ i $x_2=-6$ pa zadana funkcija ima dvije nultočke $(2,0)$ i $(-6,0)$.

b) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x-8$

Rješavamo pripadnu kvadratnu jednadžbu $-\frac{1}{2}x^2+4x-8=0$. Njezino (dvostruko) rješenje je $x=4$ pa zadana funkcija ima jednu nultočku $(4,0)$.

c) $f(x)=3x^2-5x+3$

Rješavamo pripadnu kvadratnu jednadžbu $3x^2-5x+3=0$. Jednadžba nema realnih rješenja pa zadana funkcija nema nultočaka.

7.7. GRAF FUNKCIJE $f(x)=ax^2+bx+c$

Graf kvadratne funkcije $f(x)=ax^2+bx+c$ je parabola $y=ax^2+bx+c$.

Crtanje grafa kvadratne funkcije $f(x)=ax^2+bx+c$ provodimo u nekoliko koraka:

- Ako je $a>0$, otvor parabole je prema gore, a ako je $a<0$, otvor parabole je prema dolje.
- Nalazimo **koordinate tjemena** $T(x_0,y_0)$ parabole prema formulama:

$$x_0=-\frac{b}{2a}$$

$$y_0=\frac{4ac-b^2}{4}$$

- Nalazimo sjecišta parabole s koordinatnim osima.

koordinate tjemena

Primjer. Nacrtaj graf funkcije $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{5}{2}$.

Budući je $\frac{1}{2}>0$ otvor tražene parabole je prema gore. Tjeme parabole ima koordinate:

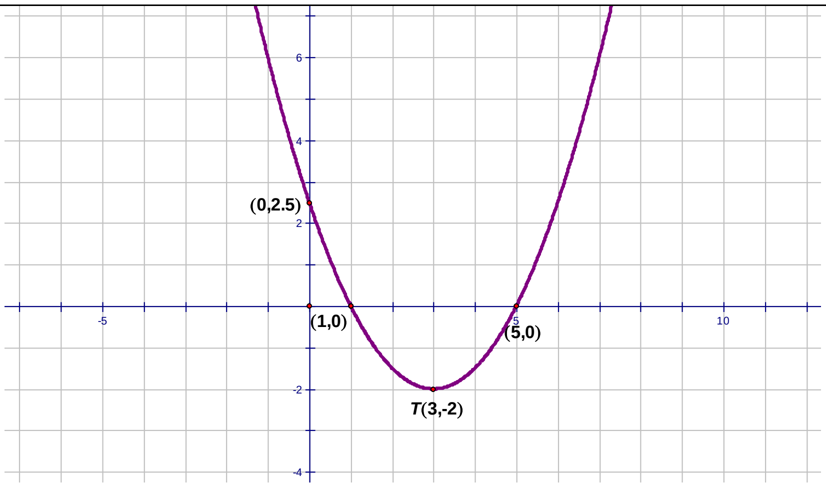
$$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-3}{2\cdot\frac{1}{2}}=3$$

$$y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}-(-3)^2}{4\cdot\frac{1}{2}}=-2$$

odnosno $T(3,-2)$.

Sjecište parabole s y osi je točka s koordinatama $\left(0,\frac{5}{2}\right)$ jer je $f(0)=\frac{5}{2}$.

Da bi odredili sjecišta parabole s x osi, tj. nultočke, rješavamo pripadnu kvadratnu jednadžbu $\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{5}{2}=0$. Njezina rješenja su $x_1=1$ i $x_2=5$ pa zadana funkcija ima dvije nultočke $(1,0)$ i $(5,0)$.



ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Riješi kvadratne jednadžbe:

a) $9x^2 - 1 = 0$

b) $\frac{x^2}{27} + 3 = 0$

c) $9(x-1)^2 = 4$

d) $(5x+5)^2 + 100 = 0$

e) $\frac{(x+1)^2}{3} + \frac{(2x-3)^2}{4} = -\frac{14x+1}{6}$

f) $-2x^2 + x = 0$

g) $x^2\sqrt{2} - x\sqrt{8} = 0$

h) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}x = 0$

i) $4\cdot(x-3) - (x^2+4x-2) = x^2$

j) $(x+1)(x-3) = 3\cdot(x-2)+3$

k) $(x+1)^2 = (x+1)(2x+1)$

l) $\frac{5x^2+7x}{4} - \frac{2x^2-9x}{2} = 0$

m) $x^2 - 4x + 3 = 0$

n) $4x^2 + 4x - 15 = 0$

o) $16x^2 + 24x - 7 = 0$

p) $6x^2 - x - 2 = 0$

r) $x^2 + 110 = -22x$

s) $x = \frac{96}{x+4}$

t) $\frac{x-12}{3-x} = \frac{x+4}{x+7}$

u) $3\cdot(x-2)(x+2) = x^2 - 5$

2. Ne rješavajući kvadratnu jednadžbu odredi broj i vrstu, te zbroj i umnožak njezinih rješenja:

a) $8x^2 + 3x + 5 = 0$

b) $1 - 4x + 4x^2 = 0$

c) $3x^2 = 4x + 5$

3. Odredi realni parametar p tako da jednadžba:

a) $x^2 - px + 4 = 0$ ima jedno (dvostruko) realno rješenje

b) $2px^2 - x + 1 = 0$ ima dva različita realna rješenja

c) $x^2 - 5x + p - 1 = 0$ nema realnih rješenja (ima konjuguirano kompleksna rješenja)

d) $(p-2)x^2 - 2px + p - 2 = 0$ ima dva različita realna rješenja

4. Nacrtaj graf kvadratne funkcije (pomacima po koordinatnim osima):

a) $f(x) = -2(x-2)^2 + 3$

b) $f(x) = 2(x+3)^2 - 1$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$

d) $f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$

5. Nacrtaj graf kvadratne funkcije (odredi koordinate tjemena i sjecišta s koordinatnim osima):

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x - 9$

d) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3$

KONTROLNA ZADAĆA – ZADACI ZA SAMOPROVJERU ZNANJA

PRIMJER PISANOG ISPITA ZNANJA IZ MATEMATIKE

1. Riješi jednadžbu: $x-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)\right]=x-\frac{x-2}{3}$
2. Riješi nejednadžbu, skup rješenja skiciraj na brojevnom pravcu i zapiši u obliku intervala:
$$1+\frac{x-1}{10}\leq x-\frac{2x+3}{5}-\frac{1}{2}$$
3. Traženom metodom riješi sustave jednadžbi:

a) metodom supstitucije:

$$\begin{cases} 4\cdot(x-1)-3\cdot(x+y)=0 \\ 3x-4\cdot(y-2)=0 \end{cases}$$

b) metodom suprotnih koeficijenata:

$$\begin{cases} \frac{4x-y-12}{5}+\frac{x-2y+3}{15}=0 \\ \frac{5x-y-9}{12}-\frac{4x-y-13}{9}=1 \end{cases}$$

c) grafičkom metodom:

$$\begin{cases} -2x-y-5=0 \\ -x+y-1=0 \end{cases}$$

4. Ivo, Pero i Marko za obavljeni su posao dobili 910 kn. Ako je Ivo radio 6 sati, Pero 8 sati, a Marko 12 sati, koliko će kuna dobiti svaki od njih?
5. Za prijevoz sirove nafte potrebno je 40 cisterni nosivosti 20.2 t.
   a) Ako su na raspolaganju cisterne nosivosti 25.25 t, koliko će ih trebati za prijevoz iste količine nafte?
   b) Kolika je nosivost cisterni ako će ih za prijevoz iste količine nafte trebati 64?
6. Trgovački putnik osim plaće i plaćenog prijevoza dobije proviziju od 3.5% po narudžbi.
   a) Ako je u jednom mjesecu imao narudžbi u vrijednosti 821.1 kn, 5016.65 kn, 2575.5 kn i 696.75 kn, kolika je bila provizija?
   b) Koliku je narudžbu imao trgovački putnik u jednom mjesecu ako mu je provizija bila 420 kn?
7. Koliko postotni alkohol moramo pomiješati s 30 litara 40%-tnog alkohola da bi dobili 50 litara 60%-tnog alkohola?
8. Izračunaj opseg jednakokračnog trokuta ako je njegova površina 60 cm², a duljina visine na osnovicu 0.12 m.
9. Izračunaj površinu romba ako je njegov opseg 68 cm, a duljina jedne njegove dijagonale 30 cm.
10. Opsezi dviju koncentričnih kružnica su 5024 mm i 389.36 cm. Izračunaj površinu kružnog vijenca određenog tim kružnicama.
11. Ako je $z_1=-4+3i$ i $z_2=1+i$, odredi $\overline{z_2}-z_1$, $\overline{z_1}\cdot z_2$, $3\cdot z_1^2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $|z_1+z_2|$.
12. Riješi jednadžbe:

a) $-13+6x-x^2=0$

b) $(x-3)^2+(x-4)^2=(x-5)^2+5$

12. Ne rješavajući kvadratnu jednadžbu $3+\frac{1}{2}x^2-x=0$ odredi broj i vrstu, te zbroj i umnožak njezinih rješenja.
13. Nacrtaj graf kvadratne funkcije:
   a) $f(x)=-2(x-1)^2+4$ (pomacima po koordinatnim osima)
   b) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$ (odredi koordinate tjemena i sjecišta s koordinatnim osima)

KORIŠTENA LITERATURA:

[1] Ivan Mrkonjić, *Matematika u struci* 1, udžbenik sa zbirkom zadataka, Neodidacta, Zagreb, 2007.

[2] Ivan Mrkonjić, *Matematika u struci* 2, udžbenik sa zbirkom zadataka, Neodidacta, Zagreb, 2007.

[3] I. Gusić, J. Krajina, *Matematika* 1, udžbenik sa zbirkom zadataka za strukovne škole, I. i II. dio, Školska knjiga, Zagreb, 2007.

[4] Lj. Kelava Račić, Z. Šikić, *Matematika* 2, udžbenik sa zbirkom zadataka za strukovne škole, I. i II. dio, Školska knjiga, Zagreb, 2007.