ŠKOLA ZA CESTOVNI PROMET
Zagreb

NASTAVNO PISMO
ZA PROGRAME OBRAZOVANJA ODRASLIH

Nastavni predmet:

MATEMATIKA

2. RAZRED

Zanimanje:

TEHNIČAR CESTOVNOG PROMETA

Autor: Marija Mlinarević, prof.

Zagreb, 2011.

KAKO KORISTITI NASTAVNO PISMO

Cijenjeni polaznici,

Svrha nastavnog pisma je olakšati Vam organizaciju samostalnog učenja, pripremanje i polaganje ispita te uspješno završavanje upisanog programa.

Na početku nastavnog pisma nalazi se sadržaj koji daje najkraći uvid u strukturu teksta, odnosno orijentacijski uvid u nastavne cjeline i jedinice koje su razrađene u nastavnom pismu i s kojima ćete se upoznati.

U razradi nastavnih cjelina definirani su novi pojmovi i objašnjena pravila i postupci koje koristimo u rješavanju zadataka. Slijedi niz detaljno objašnjenih primjera, popraćenih skicama i slikama, kroz koje uvježbavamo uvedeno. Pojmovi i pravila koje uvodimo, zbog lakšeg i bržeg snalaženja, istaknuti su na marginama. Prilikom učenja na margine možete zapisivati svoje osobne bilješke jer je nastavno pismo zamišljeno kao radni udžbenik.

Iza svake nastavne cjeline nalaze se zadaci za vježbu koje je dobro riješiti nakon proučenih primjera, posebno zato što se slični zadaci pojavljuju na ispitu. Na samome kraju nastavnog pisma nalazi se primjer ispita koji će Vam poslužiti za uvježbavanje gradiva i završnu samoprovjeru znanja. Sretno!

SADRŽAJ

1. KOMPLEKSNI BROJEVI

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:
1. *Zbog čega proširujemo skup realnih brojeva?*
2. *Što je skup kompleksnih brojeva? Kako operiramo u skupu kompleksnih brojeva?*

1.1. IMAGINARNA JEDINICA I KOMPLEKSNI BROJEVI

Jednadžba $x^2 = -1$ u skupu realnih brojeva nema rješenja. Naime, ne postoji realni broj x sa svojstvom da je njegov kvadrat jednak -1. Za svaki realan broj x vrijedi da je $x^2 \geq 1$. Nameće se potreba da skup realnih brojeva proširimo tako da jednadžba $x^2 = -1$, i njoj slične jednadžbe $x^2 = -5$, $x^2 = -\frac{1}{4}$, u proširenom skupu imaju rješenja.

Skup koji je proširenje skupa realnih brojeva i u kojem jednadžba $x^2 = -1$ ima rješenje, označit ćemo sa **C** i nazvati **skupom kompleksnih brojeva**. Da bismo proširili skup realnih brojeva, potrebno je riješiti jednadžbu $x^2 = -1$. U tu svrhu ćemo broj čiji je kvadrat jednak -1 označiti s i, tj. $i^2 = -1$.

Broj označen s $i = \sqrt{-1}$ naziva se **imaginarna jedinica**.

imaginarna jedinica

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $\sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$,

b) $\sqrt{-\frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} \cdot \sqrt{-1} = \frac{5}{3} i$.

Primjer 2. Riješimo spomenute jednadžbe:

a) $x^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{-1} \quad \Rightarrow \quad x_1 = i,\ x_2 = -i$,

b) $x^2 = -5 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{-5} \quad \Rightarrow \quad x_1 = i\sqrt{5},\ x_2 = -i\sqrt{5}$,

c) $x^2 = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2} i,\ x_2 = -\frac{1}{2} i$.

Brojeve oblika bi, gdje je b realni broj, a i imaginarna jedinica nazivamo **imaginarnim brojevima**.

imaginarni brojevi

Kako je skup kompleksnih brojeva proširenje skupa realnih brojeva, on mora sadržavati realne brojeve. Želimo li da računske operacije naslijede svojstva računskih operacija u skupu realnih brojeva, dolazimo do oblika kompleksnog broja koji će ispunjavati navedene zahtjeve.

standardni oblik kompleksnog broja

Kompleksan broj je broj oblika $z = a + bi$, gdje su a i b realni brojevi.
Oblik $a + bi$ nazivamo **standardni** ili **algebarski oblik kompleksnog broja**.

realni dio

imaginarni dio

U kompleksnom broju $z = a + bi$ realni broj a je njegov **realni dio**, a realni broj b njegov **imaginarni dio**. Oznake:

$$a = \mathrm{Re}(z)$$
$$b = \mathrm{Im}(z).$$

Primjer 1. Odredimo realni i imaginarni dio sljedećih kompleksnih brojeva:

a) $z = -2 + 5i$	$\mathrm{Re}(z) = -2$	$\mathrm{Im}(z) = 5$
b) $z = \frac{1}{2} - 3i$	$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$	$\mathrm{Im}(z) = -3$
c) $z = -1 - \sqrt{2}i$	$\mathrm{Re}(z) = -1$	$\mathrm{Im}(z) = -\sqrt{2}$
d) $z = 0.25 + i$	$\mathrm{Re}(z) = 0.25$	$\mathrm{Im}(z) = 1$
e) $z = -i + 4$	$\mathrm{Re}(z) = 4$	$\mathrm{Im}(z) = -1$
f) $z = \frac{1}{4}i$	$\mathrm{Re}(z) = 0$	$\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{4}$
g) $z = 1.5$	$\mathrm{Re}(z) = 1.5$	$\mathrm{Im}(z) = 0$

Kriterij jednakosti dvaju kompleksnih brojeva:

Dva su kompleksna broja $z_1 = a_1 + b_1 i$ i $z_2 = a_2 + b_2 i$ ako i samo ako su im jednaki realni i jednaki imaginarni dijelovi, tj:

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \quad \text{i} \quad b_1 = b_2 .$$

kriterij jednakosti

Primjer 2. Odredimo realne brojeve x i y tako da vrijedi zadana jednakost:

a) $(1 + x) + (y - 2)i = -3 + 4i$

Kompleksni brojevi su jednaki ako su im jednaki realni i jednaki imaginarni dijelovi. Dakle,

$$1 + x = -3 \text{ i } y - 2 = 4 ,$$

odnosno $x = -4$ i $y = 6$.

b) $-3x + 2xi + 4y - yi = -9 - 4i$

Kompleksni broj na lijevoj strani jednakosti zapišemo najprije u standardnom obliku: $(-3x + 4y) + (2x - y)i = -9 - 4i$, a onda prema kriteriju jednakosti dvaju kompleksnih brojeva dobivamo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} -3x + 4y = -9 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$

čije je rješenje $x = -5$ i $y = -6$.

1.2. ZBRAJANJE, ODUZIMANJE I MNOŽENJE KOMPLEKSNIH BROJEVA

Shvatimo li kompleksne brojeve kao binome lako ih zbrajamo, oduzimamo i množimo.

Kompleksne brojeve zbrajamo (oduzimamo) tako da im posebno zbrojimo (oduzmemo) realne, a posebno imaginarne dijelove.

zbrajanje kompleksnih brojeva

Primjer 1. Izračunajmo $z_1 + z_2$ i $z_1 - z_2$ ako je:

a) $z_1 = 2 - 5i$ i $z_1 = 3 + i$

$$z_1 + z_2 = (2-5i)+(3+i) = 2-5i+3+i = 5-4i,$$
$$z_1 - z_2 = (2-5i)-(3+i) = 2-5i-3-i = -1-6i,$$

b) $z_1 = \frac{1}{2}+\frac{3}{4}i$ i $z_1 = \frac{2}{3}-\frac{1}{6}i$

$$z_1 + z_2 = \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}i\right) = \frac{1}{2}+\frac{3}{4}i+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}i = \frac{7}{6}+\frac{7}{12}i,$$
$$z_1 - z_2 = \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}i\right) = \frac{1}{2}+\frac{3}{4}i-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}i = -\frac{1}{6}+\frac{11}{12}i.$$

Kompleksne brojeve množimo kao binome u skupu realnih brojeva. Pri tome vrijede poznati zakoni računskih operacija i svojstvo imaginarne jedinice $i^2 = -1$.

množenje kompleksnih brojeva

$$(a+bi)\cdot(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 = ac-bd+(ad+bc)i$$

Primjer 2. Izračunajmo $z_1 \cdot z_2$ ako je:

a) $z_1 = -3i$ i $z_1 = 5-2i$

$$z_1 \cdot z_2 = -3i\cdot(5-2i) = -15i+6i^2 = -15i+6\cdot(-1) = -6-15i$$

b) $z_1 = 2-i$ i $z_1 = -\frac{1}{2}+4i$

$$z_1 \cdot z_2 = (2-i)\cdot\left(-\frac{1}{2}+4i\right) = -1+8i+\frac{1}{2}i-4i^2 = -1+8i+\frac{1}{2}i-4\cdot(-1) = 3+\frac{17}{2}i$$

Primjer 3. Izračunajmo: $(3-i)^2$.

$$(3-i)^2 = 3^2-2\cdot3\cdot i+i^2 = 9-6i-1 = 8-6i$$

Potencije imaginarne jedinice i

Računanjem dobivamo:

$$i^0 = 1,\quad i^1 = i,\quad i^2 = -1,\quad i^3 = i^2\cdot i = -1\cdot i = -i,\quad i^4 = i^3\cdot i = -i\cdot i = 1,$$
$$i^5 = i^4\cdot i = 1\cdot i = i,\quad i^6 = i^5\cdot i = i\cdot i = -1,\quad i^7 = i^6\cdot i = -1\cdot i = -i,\quad i^8 = i^7\cdot i = -i\cdot i = 1.$$

Uočimo da se ponavljaju četiri iste vrijednosti: i, -1, $-i$, 1. Ukratko, svaka potencija cjelobrojnog eksponenta od i ima jednu od te četiri vrijednosti. Općenito, za $n \in \mathbf{N}$ vrijedi:

$$i^{4n} = i^0 = 1,$$
$$i^{4n+1} = i^1 = i,$$
$$i^{4n+2} = i^2 = -1,$$
$$i^{4n+3} = i^3 = -i.$$

potencije imaginarne jedinice

Primjer 4. Izračunajmo i^{83}.

Budući da je $83:4=20$ i ostatak 3, dobivamo:

$$i^{83}=i^{4\cdot 20+3}=i^3=-i.$$

Primjer 5. Izračunajmo:

a) $\left(i^{16}\right)^5-8\frac{i^{55}}{i^{17}}-5i^{18}\cdot i^{13}=i^{80}-8i^{38}-5i^{31}=i^0-8i^2-5i^3=$

$=1-8\cdot(-1)-5\cdot(-i)=9+5i$,

b) $\left(\frac{i^{2009}+i^{2008}}{i^{2010}}\right)^2=\left(\frac{i^1+i^0}{i^2}\right)^2=\left(\frac{i+1}{-1}\right)^2=(i+1)^2=i^2+2i+1=2i$.

1.3. DIJELJENJE KOMPLEKSNIH BROJEVA

Dva kompleksna broja koja se razlikuju samo u predznaku imaginarnog dijela nazivaju se **konjugirano kompleksni brojevi**.

konjugirano kompleksni brojevi

Ako je zadan kompleksan broj $z=a+bi$, tada je njemu konjugirano kompleksan broj $\bar{z}=a-bi$, čitamo „z potez“.

Primjer 1. Odredimo konjugirano kompleksan broj zadanog kompleksnog broja:

a) $z=-2+5i$ $\qquad \bar{z}=-2-5i$

b) $z=-i-4$ $\qquad \bar{z}=i-4$

c) $z=\frac{1}{4}i$ $\qquad \bar{z}=-\frac{1}{4}i$

d) $z=1.5$ $\qquad \bar{z}=1.5$

Odredimo sada produkt kompleksnog broja $z=a+bi$ i njemu konjugirano kompleksnog broja $\bar{z}=a-bi$:

$$z\cdot\bar{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2-b^2i^2=a^2+b^2.$$

Primjer 2. Izračunajmo:

a) $(3+2i)\cdot(3-2i)=3^2+2^2=13$

b) $(-5+i)\cdot(-5-i)=(-5)^2+1^2=26$

Kompleksni broj dijelimo realnim brojem tako da njegov realni i njegov imaginarni broj podijelimo tim brojem.

Primjer 3. Izračunajmo: $(-3+6i):(-2)$.

$$(-3+6i):(-2)=\frac{-3+6i}{-2}=\frac{-3}{-2}+\frac{6}{-2}i=\frac{3}{2}-3i.$$

Dva kompleksna broja dijelimo tako da dijeljenje najprije zapišemo u obliku razlomka. Taj razlomak zatim proširimo množeći njegov brojnik i nazivnik konjugiranim nazivnikom:

dijeljenje kompleksnih brojeva

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{c^2+d^2}$$

Primjer 4. Izračunajmo:

a) $\frac{8-i}{2+i}=\frac{8-i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}=\frac{(8-i)\cdot(2-i)}{(2+i)\cdot(2-i)}=\frac{16-8i-2i+i^2}{2^2+1^2}=\frac{15-10i}{5}=\frac{15}{5}-\frac{10}{5}i=3-2i$

b) $\frac{1}{4-5i}=\frac{1}{4-5i}\cdot\frac{4+5i}{4+5i}=\frac{4+5i}{(4-5i)\cdot(4+5i)}=\frac{4+5i}{4^2+5^2}=\frac{4+5i}{41}=\frac{4}{41}+\frac{5}{41}i$

c) $\frac{3-2i}{i}=\frac{3-2i}{i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{(3-2i)\cdot i}{i^2}=\frac{3i-2i^2}{-1}=\frac{2+3i}{-1}=\frac{2}{-1}+\frac{3}{-1}i=-2-3i$

Primjer 5. Odredimo $\frac{z-\bar{z}}{-11i^{74}-z\cdot\bar{z}}$ ako je $z=-4+5i$.

Najprije je $\bar{z}=-4-5i$ i $z\cdot\bar{z}=(-4)^2+5^2=41$. Dalje je $i^{74}=i^2=-1$.

Sada imamo:

$$\frac{-4+5i-(-4-5i)}{-11\cdot(-1)-41}=\frac{-4+5i+4+5i}{11-41}=\frac{10i}{-30}=-\frac{1}{3}i.$$

1.4. APSOLUTNA VRIJEDNOST KOMPLEKSNOG BROJA

Apsolutna vrijednost (modul) kompleksnog broja $z=a+bi$ je

apsolutna vrijednost kompleksnog broja

$$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Apsolutna vrijednost uvijek je nenegativan realan broj.

Primjer 1. Izračunajmo apsolutne vrijednosti zadanih kompleksnih brojeva:

a) $z=3+4i$ $\qquad |z|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

b) $z=-2-i$ $\qquad |z|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

c) $z=-5$ $\qquad |z|=\sqrt{(-5)^2+0^2}=5$

d) $z=7i$ $\qquad |z|=\sqrt{0^2+7^2}=\sqrt{49}=7$

Primjer 5. Odredimo Re(z), Im(z) i |z| zadanog kompleksnog broja:

a) $z=-2-2i-\frac{9-8i}{2+i}$

Budući da je: $\frac{9-8i}{2+i}=\frac{9-8i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}=\frac{18-9i-16i+8i^2}{2^2+1^2}=\frac{10-25i}{5}=2-5i$,

imamo: $z=-2-2i-(2-5i)=-2-2i-2+5i=-4+3i$

pa je $\mathrm{Re}(z)=-4$, $\mathrm{Im}(z)=3$ i $|z|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{25}=5$.

b) $z=\frac{1-i}{(3-i)\cdot(1+2i)}$

Imamo:

$$z=\frac{1-i}{(3-i)\cdot(1+2i)}=\frac{1-i}{3-i+6i-2i^2}=\frac{1-i}{5+5i}\cdot\frac{5-5i}{5-5i}=\frac{-10i}{50}=-\frac{1}{5}i$$

pa je $\mathrm{Re}(z)=0$, $\mathrm{Im}(z)=-\frac{1}{5}$ i $|z|=\sqrt{0^2+\left(-\frac{1}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{25}}=\frac{1}{5}$.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Odredite realne brojeve x i y tako da vrijedi zadana jednakost:
   a) $(3x-2y)+(x+2y)i=4+4i$,
   b) $(-3x+2x)+(5-3y)i=-i$,
   c) $3x+7yi-2-i=4+5i$,
   d) $(4-3i)x-(2-5i)y=7$
2. Izračunajte:
   c) $\left(i^{16}\right)^5-4i^{72}:i^{30}-7i^{23}\cdot i^{33}=$
   d) $\left(i\sqrt{3}\right)^4+\left(i\sqrt[3]{5}\right)^3+8\left(i\sqrt{6}\right)^2-9\cdot(2i)^5=$
   e) $\left(i^{81}-i^{181}\right)^{1270}=$
   f) $\left(\frac{i^{142}+2\cdot i^{1000}}{-i^{98}}\right)^{8783}=$
   g) $\left(\frac{i^{55}-i^{66}}{i^4-i^{329}}\right)^{50}=$
3. Izračunajte Re(z), Im(z) i |z| zadanog kompleksnog broja:
   a) $z=\frac{5-i}{10i}$,
   b) $z=2-\frac{3+i}{1-i}$,
   c) $z=\left(3-i^{57}\right)^2$,
   d) $z=\frac{4+i}{-4+i}-\frac{2+2i}{3+i}$,
   e) $z=\frac{1+i}{(2-i)\cdot(3+2i)}$,
   f) $z=\frac{i^{357}}{(1-2i)\cdot(3+i)}$.
4. Ako je $z_1=-4+3i$ i $z_2=1+i$, odredite:
   a) $\overline{z_2}-z_1$, $\overline{z_1}\cdot z_2$, $3\cdot z_1^2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $|z_1|$, $|z_1+z_2|$, $|z_1\cdot z_2|$,
   b) $\frac{\overline{z_1}-z_1}{-1+z_1\cdot\overline{z_1}}$,
   c) $\frac{i^{96}-2z_1{}^2\cdot|z_2|}{\overline{z_1}-4}$.

2. KVADRATNA JEDNADŽBA

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:
1. Koju jednadžbu nazivamo kvadratnom jednadžbom?
2. Kako rješavamo različite oblike kvadratne jednadžbe?

2.1. KVADRATNA JEDNADŽBA. RJEŠAVANJE POSEBNIH KVADRATNIH JEDNADŽBI

Jednadžba oblika $ax^2+bx+c=0$ gdje su $a,b,c\in\mathbf{R}$ i $a\neq 0$ naziva se **kvadratna jednadžba**.

kvadratna jednadžba

Zahtjev da je $a\neq 0$ osigurava da jednadžba sadrži x^2. Naime, ako je $a=0$, radi se o linearnoj jednadžbi $bx+c=0$.

Brojevi a, b i c nazivaju se koeficijenti kvadratne jednadžbe.
Koeficijent a nazivamo **kvadratni** ili **vodeći**, koeficijent b **linearni**, a koeficijent c **slobodni** koeficijent.

kvadratni

linearni

slobodni koeficijent

Primjer 1. Odredimo kvadratni, linearni i slobodni koeficijent kvadratne jednadžbe:

jednadžba	kvadratni koeficijent	linearni koeficijent	slobodni koeficijent
a) $2x^2-3x+4=0$	2	-3	4
b) $-x^2+\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}=0$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$
c) $-6.2x^2+x=0$	-6.2	1	0
d) $3x^2-\sqrt{3}=0$	3	0	$-\sqrt{3}$
e) $3-5x+7x^2=0$	7	-5	3

Ako je u kvadratnoj jednadžbi koeficijent b ili c jednak nuli, jednadžbu nazivamo **nepotpuna**.

nepotpuna kvadratna jednadžba

Kvadratna jednadžba kojoj je koeficijent b jednak nuli, tj, jednadžba oblika $ax^2+c=0$ naziva se **čista kvadratna jednadžba**. Rješavamo je tako da najprije slobodni koeficijent c prebacimo na desnu stranu jednadžbe

čista kvadratna jednadžba

$$ax^2=-c\,,$$

a zatim dobivenu jednadžbu podijelimo brojem a:

$$x^2=-\frac{c}{a}.$$

Korjenovanjem nalazimo dva rješenja:

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Primjer 2. Riješimo čiste kvadratne jednadžbe:

a) $x^2-9=0$

$x^2=9$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{9}$

$x_{1,2}=\pm 3$

b) $x^2+25=0$

$x^2=-25$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{-25}$

$x_{1,2}=\pm 5i$

Kvadratnu jednadžbu kojoj je slobodni koeficijent c jednak nuli, tj. jednadžba oblika $ax^2+bx=0$ naziva se **prikraćena kvadratna jednadžba**. Rješavamo je izlučivanjem nepoznanice x:

prikraćena kvadratna jednadžba

$$x\cdot(ax+b)=0.$$

Na lijevoj strani dobivamo umnožak faktora x i $(ax+b)$. Umnožak je jednak 0 samo ako je bar jedan od faktora jednak 0:

$$x=0 \text{ ili } ax+b=0.$$

Rješavanjem druge jednadžbe nalazimo oba rješenja:

$$x_1=0 \text{ ili } x_2=-\frac{b}{a}.$$

Primjer 3. Riješimo prikraćene kvadratne jednadžbe:

a)

$x^2+6x=0$

$x(x+6)=0$

$x=0$ ili $x+6=0$

$x_1=0$ ili $x_2=-6$

b)

$3x^2-\frac{2}{3}x=0$

$x\left(3x-\frac{2}{3}\right)=0$

$x=0$ ili $3x-\frac{2}{3}=0$

$x=0$ ili $9x-2=0$

$x_1=0$ ili $x_2=\frac{2}{9}$

2.2. RJEŠAVANJE OPĆE KVADRATNE JEDNADŽBE

Prije rješavanja kvadratne jednadžbe u općem obliku, riješimo ove jednadžbe:

Primjer 1. Riješimo jednadžbu $x^2-6x+9=0$.

Lijeva strana jednadžbe je potpuni kvadrat, tj. $x^2-6x+9=(x-3)^2$, pa jednadžbu možemo napisati u obliku:

$$(x-3)^2=0.$$

Odavde je $x-3=0$, odnosno $x=3$.

Primjer 2. Riješimo jednadžbu $x^2-10x+21=0$.

Nadopunimo lijevu stranu jednadžbe do punog kvadrata:

$$x^2-10x+5^2-5^2+21=0.$$

Dobivamo:

$$(x-5)^2-25+21=0$$

$$(x-5)^2=4$$
$$x-5=\pm\sqrt{4}$$
$$x-5=\pm 2$$
$$x_1=7 \text{ i } x_2=3.$$

Postupkom nadopunjavanja do potpunog kvadrata opće kvadratne jednadžbe, dolazimo do **formule za rješenja kvadratne jednadžbe**:

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

formula za rješenja kvadratne jednadžbe

Primjer 3. Riješimo kvadratne jednadžbe:

a) $x^2-8x+7=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot1\cdot7}}{2\cdot1}=\frac{8\pm\sqrt{64-28}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{8\pm6}{2}$$
$$x_1=\frac{8-6}{2}=1 \text{ i } x_2=\frac{8+6}{2}=7.$$

b) $x^2-6x+13=0$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot13}}{2\cdot1}=\frac{6\pm\sqrt{36-52}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{6\pm4i}{2}$$
$$x_1=\frac{6+4i}{2}=3+2i \text{ i } x_2=\frac{6-4i}{2}=3-2i.$$

Primjer 4. Riješimo kvadratne jednadžbe:

a) $\dfrac{x+1}{4x+6}=\dfrac{x-1}{2x+3}$

$$(x+1)(2x+3)=(x-1)(4x+6)$$
$$2x^2+3x+2x+3=4x^2-4x+6x-6$$
$$2x^2-3x-9=0$$
$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot(-9)}}{2\cdot2}=\frac{3\pm9}{4}$$
$$x_1=\frac{3+9}{4}=3 \text{ i } x_2=\frac{3-9}{4}=-\frac{3}{2}$$

b) $(x+3)^2+(2x+1)^2=(x+4)^2$

$$x^2+6x+9+4x^2+4x+1=x^2+8x+16$$
$$4x^2+2x-6=0$$
$$2x^2+x-3=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot2\cdot(-3)}}{2\cdot2}=\frac{-1\pm5}{4}$$
$$x_1=\frac{-1+5}{4}=1 \text{ i } x_2=\frac{-1-5}{4}=-\frac{3}{2}.$$

2.3. DISKRIMINANTA KVADRATNE JEDNADŽBE

Pogledamo li formulu za rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2+bx+c=0$:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

možemo uočiti da broj i vrsta rješenja ovisi o predznaku izraza b^2-4ac, koji se nalazi pod korijenom. Taj se izraz naziva **diskriminanta** kvadratne jednadžbe i označava s D.

diskriminanta kvadratne jednadžbe

Diskriminanta kvadratne jednadžbe $D=b^2-4ac$ određuje vrstu rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2+bx+c=0$:

- ako je $D > 0$, jednadžba ima dva različita realna rješenja: $x_1\neq x_2$,
- ako je $D < 0$, jednadžba ima dva konjugirano kompleksna rješenja: $x_1=\overline{x_2}$,
- ako je $D = 0$, jednadžba ima jedno (dvostruko) realno rješenje: $x_1=x_2$.

Primjer 1. Izračunajmo diskriminantu i odredimo vrstu rješenja kvadratne jednadžbe:

a) $2x^2+5x+3=0$

$D=b^2-4ac=5^2-4\cdot2\cdot3=1>0$ jednadžba ima dva različita realna rješenja

b) $2x^2+3x+2=0$

$D=b^2-4ac=3^2-4\cdot2\cdot2=-7<0$ jednadžba ima dva konjugirano kompleksna rješenja

c) $4x^2+4x+1=0$

$D=b^2-4ac=4^2-4\cdot4\cdot1=0$ jednadžba ima jedno (dvostruko) realno rješenje

Primjer 2. Odredi realni parametar p tako da jednadžba:

a) $x^2-4x+p-1=0$ ima dva različita realna rješenja

Zanima nas kada je $D>0$.

$D=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot1\cdot(p-1)=16-4p+4=20-4p$

$20-4p>0$, $-4p>-20$, $p<5$.

b) $px^2+2x-4=0$ nema realnih rješenja

Ako jednadžba nema realnih rješenja, onda su njezina rješenja konjugirano kompleksni brojevi pa nas zanima kada je $D<0$.

$D=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot1\cdot(p-1)=16-4p+4=20-4p$

$20-4p>0$, $-4p>-20$, $p<5$.

c) $4px^2-(4p+2)x+p=0$ ima jedno dvostruko realno rješenje

$D=b^2-4ac=(-(4p+2))^2-4\cdot4p\cdot p=16p^2+16p+4-16p^2=16p+4$

Zanima nas kada je $D=0$.

$16p+4=0$, $16p=-4$, $p=-\frac{1}{4}$.

2.4. VIÈTEOVE FORMULE

Vièteove formule jesu formule za zbroj i umnožak rješenja kvadratne jednadžbe:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

$x_1,x_2\ldots$ rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2+bx+c=0$.

Vièteove formule

Primjer 1. Ne rješavajući kvadratnu jednadžbu, nađi zbroj i umnožak njezinih rješenja:

a) $5x^2-x+2=0$

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-1}{5}=\frac{1}{5}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{2}{5}$$

b) $4-6x-3x^2=0$

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-6}{-3}=-2$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{4}{-3}=-\frac{4}{3}$$

Primjer 2. Ne rješavajući kvadratnu jednadžbu $x^2-x-2=0$ odredimo vrijednost izraza $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ i $x_1^2+x_2^2$.

Najprije je $x_1+x_2=-\frac{-1}{1}=1$ i $x_1\cdot x_2=\frac{-2}{1}=-2$. Sada je

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$ i $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=1^2-2\cdot(-2)=5$.

Pogledajmo sada kako se iz poznatih rješenja kvadratne jednadžbe može **rekonstruirati** tu jednadžbu.

rekonstrukcija kvadratne jednadžbe

Svaka se kvadratna jednadžba $ax^2+bx+c=0$ može, nakon dijeljenja s a, zapisati u obliku $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$.

Primjer 3. Nađimo kvadratnu jednadžbu čija su rješenja $x_{1,2}=1\pm 2i$.

Prema Vièteovim formulama imamo:

$\frac{b}{a}=-(x_1+x_2)=-(1+2i+1-2i)=-2$ i $\frac{c}{a}=x_1\cdot x_2=(1+2i)(1-2i)=1^2+2^2=5$.

Tražena jednadžba je $x^2-2x+5=0$.

Prethodni primjer pokazuje i kako se kvadratni trinom ax^2+bx+c može faktorizirati pomoću rješenja x_1 i x_2 pripadajuće kvadratne jednadžbe $ax^2+bx+c=0$.

Svaki se kvadratni trinom može napisati u obliku:

$$ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2),$$

gdje su x_1, x_2 rješenja pripadajuće kvadratne jednadžbe $ax^2+bx+c=0$.

faktorizacija kvadratnog trinoma

Primjer 4. Faktorizirajmo kvadratni trinom x^2+x-2.
Nađimo najprije rješenja pripadajuće kvadratne jednadžbe $x^2+x-2=0$.
Dobivamo $x_1=1$ i $x_2=-2$.
Sada je:

$$x^2+x-2=(x-1)(x+2).$$

2.5. JEDNADŽBE KOJE SE SVODE NA KVADRATNU

Jednadžbe rješive faktorizacijom

Ranije smo koristili faktorizaciju kao postupak rješavanja kvadratnih jednadžbi (prikraćena kvadratna jednadžba). I jednadžbe višeg stupnja možemo rješavati faktprizacijom.

Primjer 1. Riješimo jednadžbu: $6x^3-x^2-x=0$.
Najprije faktorizirajmo lijevu stranu jednadžbe tako da izlučimo x:

$$x\cdot(x^2-x-1)=0.$$

Umnožak na lijevoj strani jednakosti jednak je 0 samo ako je jedna od faktora jednak 0, tj:

$$x=0 \text{ ili } x^2-x-1=0.$$

Dakle, rješenja polazne jednadžbe su $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{2}$ i $x_3=-\frac{1}{3}$.

Iracionalne jednadžbe

iracionalne jednadžbe

Iracionalne jednadžbe su jednadžbe u kojima se nepoznanica nalazi pod znakom korijena. Rješavamo ih kvadriranjem kojim je sačuvano svako rješenje polazne jednadžbe. Kvadriranjem, međutim, možemo doći do stranog rješenja koje nije rješenje polazne jednadžbe. Zato sva rješenja dobivena nakon kvadriranja trebamo uvrstiti u polaznu jednadžbu da bismo provjerili jesu li rješenja polazne jednadžbe ili su strana rješenja.

Primjer 2. Riješimo jednadžbu: $\sqrt{3x-2}-\sqrt{x-2}=2$.

Složeniji korijen ostavimo sam na jednoj strani jednadžbe:

$$\sqrt{3x-2}=2+\sqrt{x-2}$$

i kvadrirajmo lijevu i desnu stranu jednadžbe:

$$3x-2=4+4\sqrt{x-2}+x-2.$$

Sređivanjem dobivamo:

$$4\sqrt{x-2}=2x-4$$

te kvadriranjem:

$$16(x-2)=4x^2-16x+16.$$

Dobivena kvadratna jednadžba

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

ima rješenja $x_1 = 6$ i $x_2 = 2$. Uvrštavanjem dobivenih rješenja u polaznu jednadžbu dobivamo:

$$\begin{array}{lcl} \sqrt{3\cdot 6-2}-\sqrt{6-2}=2 & & \sqrt{3\cdot 2-2}-\sqrt{2-2}=2 \\ \sqrt{16}-\sqrt{4}=2 & \text{i} & \sqrt{4}-\sqrt{0}=2 \\ 2=2 & & 2=2 \end{array}.$$

Dobivena rješenja su rješenje polazne jednadžbe.

Jednadžbe kvadratnog tipa

Ovdje rješavamo jednadžbe koje se odgovarajućom supstitucijom mogu svesti na kvadratnu jednadžbu, npr. **bikvadratne** jednadžbe.

bikvadratna jednadžba

Primjer 3. Riješimo jednadžbu: $x^4 - 14x^2 + 45 = 0$.
Uvedemo li supstituciju $t = x^2$, dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$t^2 - 14t + 45 = 0.$$

Njezina su rješenja $t_1 = 9$ i $t_2 = 5$.
Vraćanjem u supstituciju, tj. rješavanjem jednadžbi:

$$x^2 = 9 \text{ i } x^2 = 5$$

dobivamo rješenja polazne jednadžbe:

$$x_1 = 3,\ x_2 = -3,\ x_3 = \sqrt{5} \text{ i } x_4 = -\sqrt{5}.$$

2.6. SUSTAV KVADRATNE I LINEARNE JEDNADŽBE

Sustav dviju linearnih jednadžbi od kojih je jedna linearna i jedna kvadratna rješavamo metodom supstitucije. Uobičajeno je jednu nepoznanicu izraziti iz linearne jednadžbe, dobiveni izraz uvrstimo u kvadratnu jednadžbu i riješimo je po drugoj nepoznanici, a zatim računamo prvu nepoznanicu uvrštavanjem u nađeni izraz.

sustav linearne i kvadratne jednadžbe

Primjer Riješimo sustav jednadžbi: $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x^2 - y^2 - 2x = 1 \end{cases}$.
Iz linearne jednadžbe izrazimo nepoznanicu y:

$$y = 2x - 1$$

i uvrstimo je u kvadratnu jednadžbu:

$$3x^2 - (2x-1)^2 - 2x = 1$$

te je riješimo po nepoznanici x.
Sređivanjem dobivamo jednadžbu:

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

čija su rješenja $x_1 = 1 + i$ i $x_2 = 1 - i$. Uvrštavanjem u izraz $y = 2x - 1$ dobivamo:
$y_1 = 2\cdot(1+i) - 1 = 1 + 2i$ i $y_2 = 2\cdot(1-i) - 1 = 1 - 2i$.
Rješenja sustava su uređeni parovi: $(1+i, 1+2i)$ i $(1-i, 1-2i)$.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Riješite kvadratne jednadžbe:

a) $9x^2-1=0$

b) $\frac{x^2}{27}+3=0$

c) $9(x-1)^2=4$

d) $(5x+5)^2+100=0$

e) $\frac{(x+1)^2}{3}+\frac{(2x-3)^2}{4}=-\frac{14x+1}{6}$

f) $-2x^2+x=0$

g) $x^2\sqrt{2}-x\sqrt{8}=0$

h) $\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{4}x=0$

i) $4\cdot(x-3)-(x^2+4x-2)=x^2$

j) $(x+1)(x-3)=3\cdot(x-2)+3$

k) $(x+1)^2=(x+1)(2x+1)$

l) $\frac{5x^2+7x}{4}-\frac{2x^2-9x}{2}=0$

m) $x^2-4x+3=0$

n) $4x^2+4x-15=0$

o) $16x^2+24x-7=0$

p) $6x^2-x-2=0$

r) $x^2+110=-22x$

s) $x=\frac{96}{x+4}$

t) $\frac{x-12}{3-x}=\frac{x+4}{x+7}$

u) $3\cdot(x-2)(x+2)=x^2-5$

2. Ne rješavajući kvadratnu jednadžbu odredite broj i vrstu, te zbroj i umnožak njezinih rješenja:
   a) $8x^2+3x+5=0$,
   b) $1-4x+4x^2=0$,
   c) $3x^2=4x+5$.
3. Odredite realni parametar p tako da jednadžba:
   a) $x^2-px+4=0$ ima jedno (dvostruko) realno rješenje,
   b) $2px^2-x+1=0$ ima dva različita realna rješenja,
   c) $x^2-5x+p-1=0$ nema realnih rješenja (ima konjuguirano kompleksna rješenja),
   d) $(p-2)x^2-2px+p-2=0$ ima dva različita realna rješenja.
4. Napišite kvadratnu jednadžbu ako su njezina rješenja/jedno njezino rješenje:
   a) $x_1=5$, $x_2=-10$,
   b) $x_{1,2}=1\pm 2i$,
   c) $x_1=\frac{2}{5}i$,
   d) $x_1=\frac{3-3i}{i}$.
5. Koristeći se faktorizacijom kvadratnog trinoma, skratite razlomke:
   a) $\frac{4x^2-1}{2x^2-9x-5}$,
   b) $\frac{4x^2-4x-3}{6x^2-x-2}$.
6. Riješite jednadžbe:
   a) $x^3-x^2-6x=0$,

b) $x^4+3x^2-4=0$,

c) $\frac{9}{x^4}+1=\frac{10}{x^2}$,

d) $x^2-8=\left(\frac{3}{x}\right)^2$,

e) $\left(x^2-4x\right)^2-17\left(x^2-4x\right)+60=0$,

f) $\sqrt{x+7}-\sqrt{2x}=1$,

g) $\sqrt{2x+9}-\sqrt{x-4}=3$.

7. Riješite sustave jednadžbi:

a) $\begin{cases} 3x^2-y^2-2x=1 \\ 2x-y=1 \end{cases}$,

b) $\begin{cases} xy=2 \\ x-y=1 \end{cases}$.

3. POLINOM DRUGOG STUPNJA I NJEGOV GRAF

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:

1. Što je graf kvadratne funkcije i kako ga crtamo?
2. Što su nultočke, a što ekstremi kvadratne funkcije?
3. U kojem međusobnom položaju mogu biti pravac i parabola i kako određujemo taj položaj?

3.1. GRAF POLONOMA DRUGOG STUPNJA

kvadratna funkcija

Kvadratna funkcija je funkcija oblika $f(x)=ax^2+bx+c$, gdje su $a,b,c\in\mathbf{R}$ i $a\neq 0$.

parabola

Graf kvadratne funkcije je krivulja koju nazivamo **parabola**. Njezin oblik ovisi samo o kvadratnom koeficijentu a. Linearni koeficijent b i slobodni koeficijent c određuju tek položaj parabole u koordinatnom sustavu.

Graf kvadratne funkcije $f(x)=ax^2$

Primjer 1. U istom koordinatnom sustavu nacrtajmo grafove kvadratnih funkcija:

a) $f(x)=x^2$,

b) $f(x)=2x^2$,

c) $f(x)=\frac{1}{2}x^2$,

d) $f(x)=-x^2$.

Kako bi nacrtali grafove zadanih kvadratnih funkcija, odredimo nekoliko njihovih točaka:

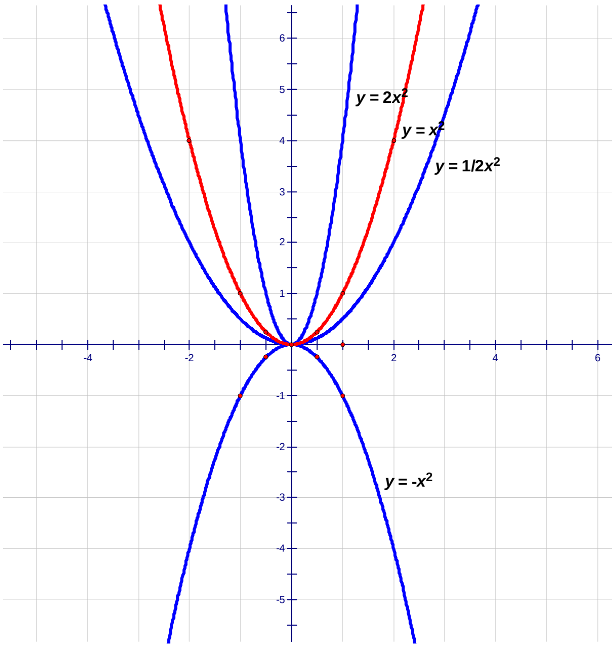
x	0	1	-1	2	-2
$f(x)=x^2$	0	1	1	4	4

x	0	1	-1	2	-2
$f(x)=2x^2$	0	2	2	8	8

x	0	1	-1	2	-2
$f(x)=\frac{1}{2}x^2$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	2

x	0	1	-1	2	-2
$f(x)=-x^2$	0	-1	-1	-4	-4

Ucrtavanjem i spajanjem dobivenih točaka skicirajmo tražene grafove:



Nacrtane parabole simetrične su s obzirom na y-os. To je **os parabole**.
Sve nacrtane parabole prolaze ishodištem koordinatnog sustava. Za prve tri parabole to je najniža, a za treću najviša točka parabole. Tu točku nazivamo **tjeme** parabole.

os parabole

tjeme

Zaključujemo:
Kada je koeficijent a pozitivan, tada je otvor parabole prema gore, a kada je negativan, otvor parabole je prema dolje.

Graf kvadratne funkcije $f(x)=ax^2+c$

Primjer 2. U istom koordinatnom sustavu nacrtajmo grafove kvadratnih funkcija:

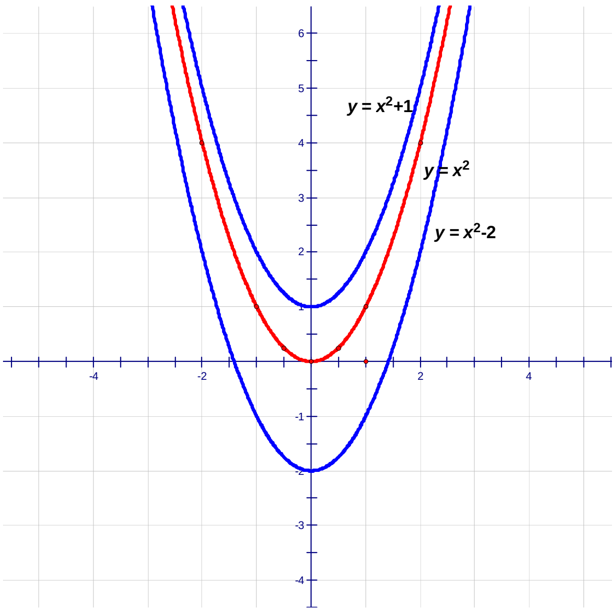
a) $f(x)=x^2$,
b) $f(x)=x^2+1$,
c) $f(x)=x^2-2$.

Kako bi nacrtali grafove zadanih kvadratnih funkcija, odredimo nekoliko njihovih točaka:

x	0	1	-1	2	-2
$f(x)=x^2+1$	1	2	2	5	5

x	0	1	-1	2	-2
$f(x)=x^2-2$	-2	-1	-1	2	2

Ucrtavanjem i spajanjem dobivenih točaka skicirajmo tražene grafove:



Zaključujemo:

Graf kvadratne funkcije $f(x)=ax^2+c$, tj. parabola $y=ax^2+c$, dobije se pomakom parabole $y=ax^2$ za c po y osi i to prema gore ako je $c>0$, a prema dolje ako je $c<0$. Tjeme ove parabole je $T(0,c)$.

Graf kvadratne funkcije $f(x)=a(x-x_0)^2$

Primjer 3. U istom koordinatnom sustavu nacrtajmo grafove kvadratnih funkcija:

a) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$,

b) $f(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2$,

c) $f(x)=-\frac{1}{2}(x+3)^2$.

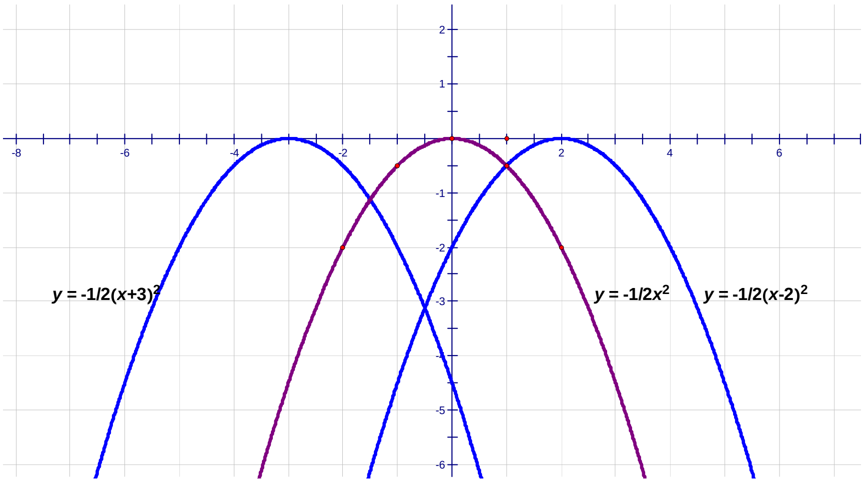
Kako bi nacrtali grafove zadanih kvadratnih funkcija, odredimo nekoliko njihovih točaka:

x	0	1	-1	2	-2
$f(x)=-\frac{1}{2}x^2$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2	-2

x	0	1	2	3	4
$f(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2

x	0	-1	-2	-3	-4	-5
$f(x)=-\frac{1}{2}(x+3)^2$	$-\frac{9}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2

Ucrtavanjem i spajanjem dobivenih točaka skicirajmo tražene grafove:



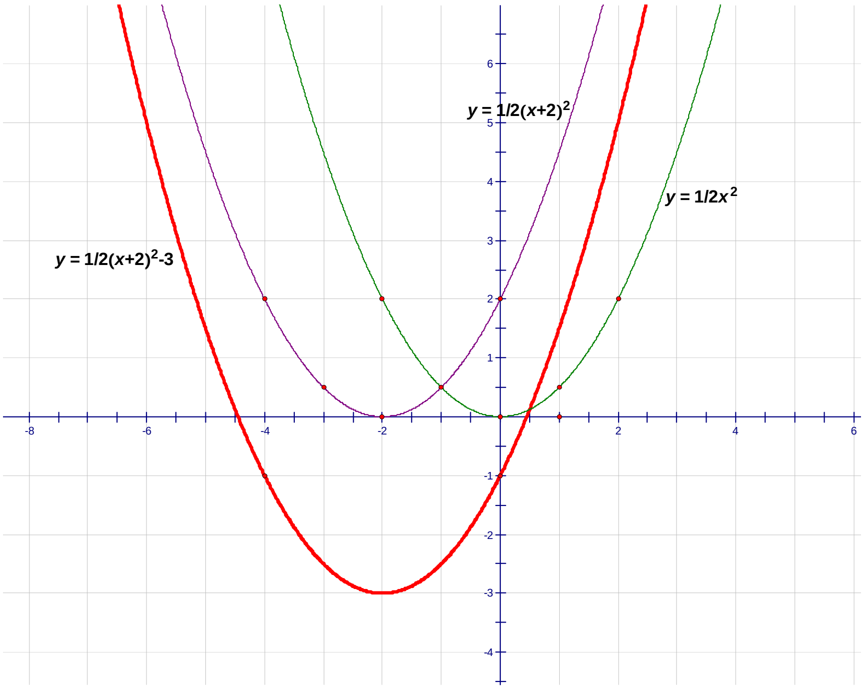
Zaključujemo:

Graf kvadratne funkcije $f(x)=a(x-x_0)^2$, tj. parabola $y=a(x-x_0)^2$, dobije se pomakom parabole $y=ax^2$ za x_0 po x osi udesno ako je $x_0>0$, a ulijevo ako je $x_0<0$. Tjeme ove parabole je $T(x_0,0)$.

Graf kvadratne funkcije $f(x)=a(x-x_0)^2+y_0$

Primjer 4. Nacrtajmo graf kvadratne funkcije $f(x)=\frac{1}{2}(x+2)^2-3$.

Prema prethodnim primjerima zaključujemo da će graf ove funkcije biti parabola dobivena pomakom parabole $y=\frac{1}{2}x^2$ po x osi za 2 ulijevo i po y osi za 3 prema dolje:



Graf kvadratne funkcije $f(x)=a(x-x_0)^2+y_0$, tj. parabola $y=a(x-x_0)^2+y_0$, dobije se pomakom parabole $y=ax^2$ za x_0 po x osi udesno ako je $x_0>0$, a ulijevo ako je $x_0<0$ i po y osi prema gore ako je $y_0>0$, a prema dolje ako je $y_0<0$. Tjeme ove parabole je $T(x_0,y_0)$.

3.2. NULTOČKE KVADRATNE FUNKCIJE

Nultočka je točka u kojoj graf funkcije siječe x os, tj. točka u kojoj je vrijednost funkcije jednaka nuli: $y=f(x)=0$. ***nultočka***

Nultočke kvadratne funkcije $f(x)=ax^2+bx+c$ rješenja su pripadne kvadratne jednadžbe $ax^2+bx+c=0$. Njezina realna rješenja sjecišta su njezinog grafa s x osi.

Primjer Odredimo nultočke kvadratnih funkcija:

a) $f(x)=x^2+4x-12$

Rješavamo pripadnu kvadratnu jednadžbu $x^2+4x-12=0$. Njezina rješenja su $x_1=2$ i $x_2=-6$ pa zadana funkcija ima dvije nultočke $(2,0)$ i $(-6,0)$.

b) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x-8$

Rješavamo pripadnu kvadratnu jednadžbu $-\frac{1}{2}x^2+4x-8=0$. Njezino (dvostruko) rješenje je $x=4$ pa zadana funkcija ima jednu nultočku $(4,0)$.

c) $f(x)=3x^2-5x+3$

Rješavamo pripadnu kvadratnu jednadžbu $3x^2-5x+3=0$. Jednadžba nema realnih rješenja pa zadana funkcija nema nultočaka.

3.3. GRAF FUNKCIJE $f(x)=ax^2+bx+c$

Graf kvadratne funkcije $f(x)=ax^2+bx+c$ je parabola $y=ax^2+bx+c$.

Crtanje grafa kvadratne funkcije $f(x)=ax^2+bx+c$ provodimo u nekoliko koraka:

- Ako je $a>0$, otvor parabole je prema gore, a ako je $a<0$, otvor parabole je prema dolje.
- Nalazimo **koordinate tjemena** $T(x_0, y_0)$ parabole prema formulama:

$$x_0=-\frac{b}{2a}$$

$$y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

- Nalazimo sjecišta parabole s koordinatnim osima.

koordinate tjemena

Primjer Nacrtaj graf funkcije $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{5}{2}$.

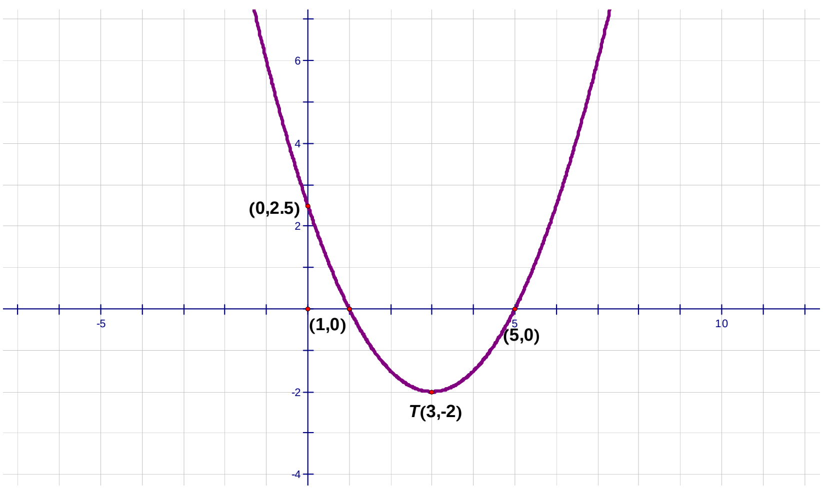
Budući je $\frac{1}{2}>0$ otvor tražene parabole je prema gore. Tjeme parabole ima koordinate:

$$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-3}{2\cdot\frac{1}{2}}=3 \text{ i } y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}-(-3)^2}{4\cdot\frac{1}{2}}=-2,$$

odnosno $T(3,-2)$.

Sjecište parabole s y osi je točka s koordinatama $\left(0,\frac{5}{2}\right)$ jer je $f(0)=\frac{5}{2}$.

Da bi odredili sjecišta parabole s x osi, tj. nultočke, rješavamo pripadnu kvadratnu jednadžbu $\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{5}{2}=0$. Njezina rješenja su $x_1=1$ i $x_2=5$ pa zadana funkcija ima dvije nultočke $(1,0)$ i $(5,0)$.



3.4. MINIMUM I MAKSIMUM KVADRATNE FUNKCIJE

Najveća (maksimum) i najmanja (minimum) vrijednost kvadratne funkcije postiže se u tjemenu pripadne parabole.

Kvadratna funkcija $f(x)=ax^2+bx+c$ postiže **minimum** m ako je $a>0$, a **maksimum** M ako je $a<0$. Minimum m ili maksimum M postiže se u $x_0=-\frac{b}{2a}$ i iznosi $y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}$. Minimum i maksimum funkcije jednim imenom zovemo **ekstremi funkcije**.

minimum i maksimum kvadratne funkcije

Primjer Odredimo minimum ili maksimum kvadratne funkcije:

a) $f(x)=3x^2-12x+1$

Budući da je $a=3>0$, kvadratna funkcija poprima minimum u točki

$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-12}{2\cdot 3}=2$ i on iznosi $y_0=\frac{4ac-b^2}{4}=\frac{4\cdot 3\cdot 1-(-12)^2}{4\cdot 3}=-11$.

b) $f(x)=-x^2-\sqrt{2}x-3$

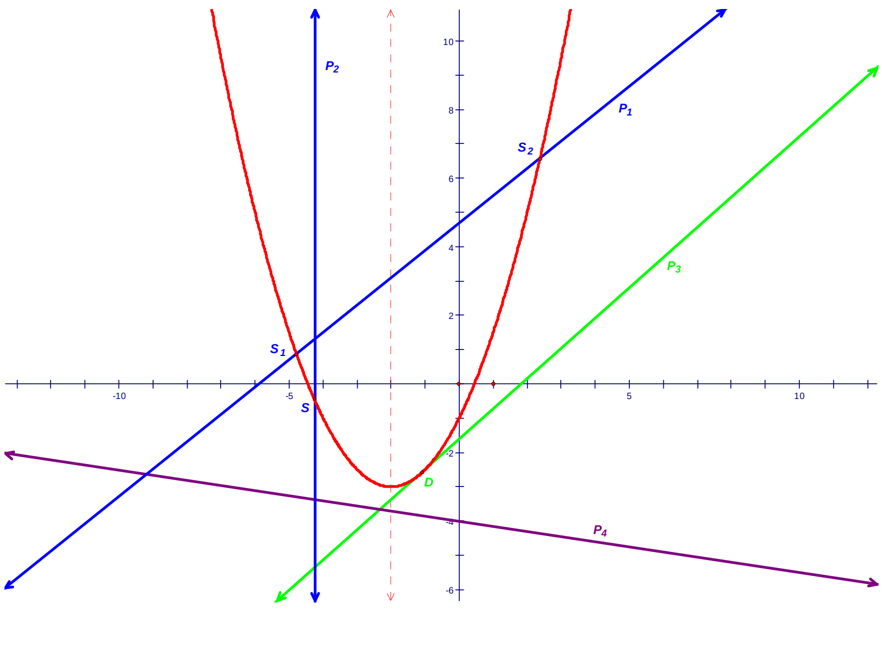
Budući da je $a=-1<0$, kvadratna funkcija poprima maksimum u točki

$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-\sqrt{2}}{2\cdot(-1)}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ i on iznosi

$$y_0=\frac{4ac-b^2}{4}=\frac{4\cdot(-1)\cdot(-3)-\left(-\sqrt{2}\right)^2}{4\cdot(-1)}=-\frac{5}{2}.$$

3.5. PRESJEK PRAVCA I PARABOLE

Pogledajmo najprije u kojem međusobnom položaju mogu biti pravac i parabola:



Međusobni položaj pravca i parabole:

1. a) Pravac p_1 siječe parabolu u dvije točke S_1 i S_2.
   b) Pravac p_2 siječe parabolu u jednoj točki S, paralelan je s *y*-osi, tj. osi parabole.
   Pravac koji siječe parabolu nazivamo **sekanta**.
2. Pravac p_3 dira parabolu u točki D.
   Pravac koji dira parabolu nazivamo **tangenta**, a točku D **dirалište** pravca i parabole.
3. Pravac p_4 i parabola nemaju zajedničkih točaka.

Međusobni položaj pravca i parabole možemo odrediti grafički i algebarski (računski). No, grafička metoda može biti neprecizna (ako u radu ne koristimo npr. računalo). U tom slučaju posežemo za algebarskom metodom. Algebarska metoda svodi se na rješavanje sustava dviju jednadžbi: linearne jednadžbe, tj. jednadžbe pravca $y = kx + l$ i kvadratne jednadžbe, tj. jednadžbe parabole $y = ax^2 + bx + c$. Ovakve sustave naučili smo rješavati u odjeljku 2.6.
Supstituirajmo y i sredimo dobivenu jednadžbu:

$$ax^2 + bx + c = kx + l \quad \Rightarrow \quad ax^2 + (b-k)x + c - l = 0$$

Time smo rješavanje sustava sveli na rješavanje kvadratne jednadžbe. Sjetimo se što zna o broju i vrsti rješenja kvadratne jednadžbe. Slijedi geometrijska interpretacija rješenja sustava je:

1. Ako je $D > 0$, sustav ima dva različita realna rješenja, tj. pravac siječe parabolu.
2. Ako je $D = 0$, sustav ima jedno dvostruko realno rješenje, tj. pravac dira parabolu.
3. Ako je $D < 0$, sustav mena realnih rješenja, tj. pravac i parabola nemaju zajedničkih točaka.

Pogledajmo sada primjere u kojima istražujemo međusobni položaj pravca i parabole.

Primjer 1. Provjerimo u kojem su međusobnom položaju pravac $y = x - 1$ i parabola $y = x^2 - 4x + 3$.

Riješimo sustav: $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$.

$$x^2 - 4x + 3 = x - 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4,\ x_2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = 4 - 1 = 3,\ y_2 = 1 - 1 = 0$$

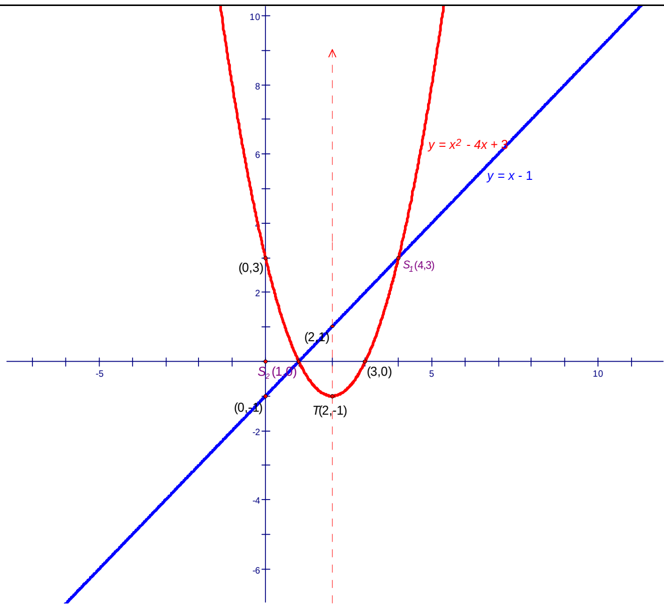
Zaključujemo da pravac siječe parabolu u dvije točke: $S_1(4,3)$ i $S_2(1,0)$.
Pogledajmo odgovarajuću sliku:

međusobni položaj pravca i parabole

sekanta

tangenta

dirалište



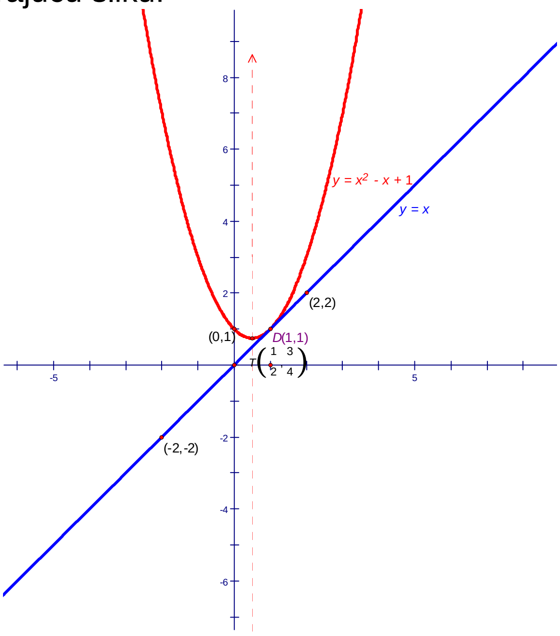
Primjer 2. Provjerimo u kojem su međusobnom položaju pravac $y = x$ i parabola $y = x^2 - x + 1$.

Riješimo sustav: $\begin{cases} y = x \\ y = x^2 - x + 1 \end{cases}$

$x^2 - x + 1 = x \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1$

Zaključujemo da pravca dira parabolu u jednoj točki, tj. pravac je tangenta parabole. Koordinate dirališta su $D(1,1)$.

Pogledajmo odgovarajuću sliku:



3.5. KVADRATNE NEJEDNADŽBE

Kvadratne nejednadžbe su nejednadžbe oblika:

$$ax^2 + bx + c > 0,\ ax^2 + bx + c \geq 0,\ ax^2 + bx + c < 0 \text{ i } ax^2 + bx + c \leq 0.$$

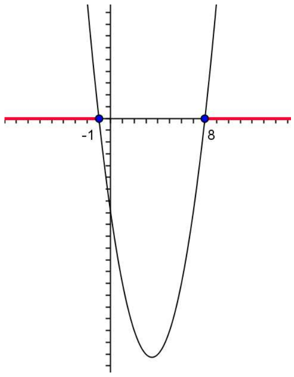
kvadratne nejednadžbe

Kvadratnu nejednadžbu rješavamo tako da riješimo odgovarajuću kvadratnu jednadžbu, tj. odredimo nultočke pripadne parabole, skiciramo tu parabolu, a zatim sa slike očitamo interval koji ispunjava uvjet zapisan nejednadžbom.

Primjer Riješimo kvadratne nejednadžbe:

a) $x^2 - 7x - 8 > 0$

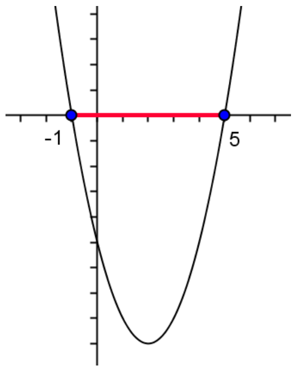
Odgovarajuća kvadratna jednadžba $x^2 - 7x - 8 = 0$ ima rješenja $x_1 = -1$ i $x_2 = 8$. Skicirajmo pripadnu parabolu kojoj je otvor prema gore:



Sa slike čitamo rješenje nejednadžbe, tj. one intervale na kojima je parabola „iznad x osi", tj. one x za koje je ispunjen uvjet $x^2 - 7x - 8 > 0$: $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 8, +\infty\rangle$.

b) $x^2 - 4x - 5 \leq 0$

Odgovarajuća kvadratna jednadžba $x^2 - 4x - 5 = 0$ ima rješenja $x_1 = -1$ i $x_2 = 5$. Skicirajmo pripadnu parabolu kojoj je otvor prema gore:



Sa slike čitamo rješenje nejednadžbe, tj. onaj interval na kojemu je parabola „ispod x osi", tj. one x za koje je ispunjen uvjet $x^2 - 4x - 5 \leq 0$: $[-1, 5]$.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Nacrtajte graf funkcije:

a) $f(x) = -(x+3)^2 - 4$ (pomacima po koordinatnim osima),

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ (odredi koordinate tjemena i sjecišta s koordinatnim osima).

2. a) Odredite realni broj b takav da tjeme parabole $y=-3x^2+bx-16$ bude u točki $T(-2,-4)$.

   b) Odredite realni broj a takav da tjeme parabole $y=ax^2-x+4$ bude u točki $T(4,8)$.

3. Odredite minimum ili maksimum kvadratne funkcije:
   a) $f(x)=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+1$,
   b) $f(x)=3x^2-\sqrt{6}x+3$.

4. Odredite međusobni položaj pravca i parabole grafički i računski:
   a) $x-y-1=0$, $y=x^2-x$,
   b) $y=2x-2$, $y=2x^2-8x+6$,
   c) $y=x-1$, $y=x^2+x$,
   d) $x=3$, $y=x^2-4x$.

5. Odredite realni broj l takav da pravac $y=2x+l$ bude tangenta parabole $y=x^2-4x+6$.

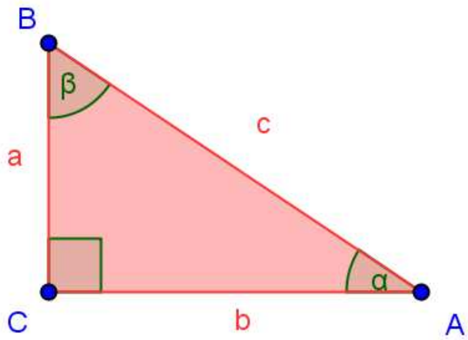
6. Riješite nejednadžbe:
   a) $3x^2-8x+4>0$,
   b) $-2x^2\geq 3-7x$.

4. TRIGONOMETRIJA PRAVOKUTNOG TROKUT

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:

1. *Kako definiramo trigonometrijske funkcije šiljastog kuta?*
2. *Kako definicije trigonometrijskih funkcija primjenjujemo na rješavanje pravokutnog trokuta? Kako ih primjenjujemo u zadacima iz planimetrije, a kako u situacijama svakodnevnog života?*

4.1. TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE ŠILJASTOG KUTA



Promotrimo pravokutni trokut s duljinama katetama a, b i duljinom hipotenuzom c. Mjere njegovih šiljastih kutova označimo α i β.

Nasuprot kuta mjere α je kateta duljine a. Naziva se **nasuprotna katetom** za kut mjere α.

nasuprotna kateta

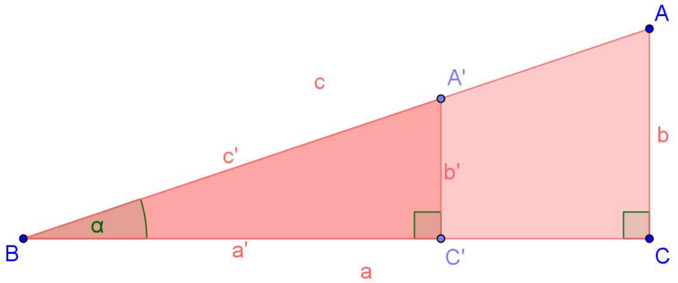
Uz kut (pri kutu) mjere α je kateta duljine b. Naziva se **priležeća katetom** za kut mjere α.

priležeća kateta

Često u govoru izostavljamo riječ „duljina“ i „mjera“ kad govorimo o duljini stranice i mjeri kuta pa kratko kažemo:

$a =$ nasuprotna kateta za kut α ,
$b =$ priležeća kateta za kut α ,
$c =$ hipotenuza.

Pogledajmo sada sliku:



Uočimo trokute ABC i $A'B'C'$. Duljine stranica trokuta ABC su a, b i c, a duljine stranica trokuta $A'B'C'$ a', b' i c'. Zbog sličnosti trokuta ABC i $A'B'C'$ vrijedi:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} .$$

Dakle, omjer duljine nasuprotne i duljine priležeće katete za kut α ne ovisi o duljini kateta a i b nego o mjeri kuta α . Slično možemo pokazati za omjer duljine nasuprotne katete i duljine hipotenuze, te omjer duljine priležeće katete i duljine hipotenuze.

U pravokutnom trokutu ABC omjere duljina kateta i duljine hipotenuze se nazivaju **trigonometrijske funkcije šiljastog kuta**.

trigonomet-rijske funkcije šiljastog kuta

U **pravokutnom trokut** za njegov **šiljasti kut** definiramo:

Sinus kuta (oznaka: sin) je omjer duljine nasuprotne katete tom kutu i duljine hipotenuze.

sinus

$$\textit{sinus kuta} = \frac{\textit{duljina nasuprotne katate}}{\textit{duljina hipotenuze}}$$

Kosinus kuta (oznaka: cos) je omjer duljine priležeće katete tom kutu i duljine hipotenuze.

kosinus

$$\textit{kosinus kuta} = \frac{\textit{duljina priležeće katate}}{\textit{duljina hipotenuze}}$$

Tangens kuta (oznaka: tg) je omjer duljine nasuprotne i duljine priležeće katete tom kutu.

tangens

$$\textit{tangens kuta} = \frac{\textit{duljina nasuprotne katate}}{\textit{duljina priležeće katete}}$$

Kotangens kuta (oznaka: ctg) je omjer duljine priležeće i duljine nasuprotne katete tom kutu.

kotangens

$$\textit{kotangens kuta} = \frac{\textit{duljina priležeće katate}}{\textit{duljina nasuprotne katete}}$$

Prema slici, u pravokutnom trokutu ABC za kut mjere α vrijedi:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b},\ \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a},$$

a za kut mjere β:

$$\sin\beta = \frac{b}{c},\ \cos\beta = \frac{a}{c},\ \mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{a},\ \mathrm{ctg}\,\beta = \frac{a}{b}.$$

Primjer 1. Izračunajmo vrijednosti trigonometrijskih funkcija (računat ćemo ih na 5 decimala) kutova α i β u pravokutnom trokutu ABC ako su duljine kateta 5 cm i 12 cm.

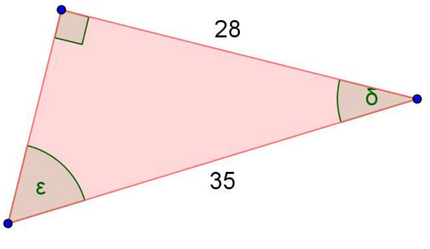
Neka je $a = 5$ cm i $b = 12$ cm. Primjenom Pitagorina poučka računamo najprije duljinu hipotenuze:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}.$$

Sada je:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{5}{13} = 0.38462,$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{12}{13} = 0.92308,$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{5}{12} = 0.41\dot{6},$$
$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a} = \frac{12}{5} = 2.4,$$
$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{12}{13} = 0.92308,$$
$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{5}{13} = 0.38462,$$
$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{a} = \frac{12}{5} = 2.4,$$
$$\mathrm{ctg}\,\beta = \frac{a}{b} = \frac{5}{12} = 0.41\dot{6}.$$

Primjer 2. Izračunaj vrijednosti trigonometrijskih funkcija za kutove sa slike ako je duljina jedne njegove katete 28 cm, a duljina hipotenuze 35 cm:



Primjenom Pitagorina poučka izračunajmo duljinu druge katete, označimo je x:

$$x=\sqrt{35^2-28^2}=\sqrt{1225-784}=\sqrt{441}=21\text{cm}.$$

Sada je:

$$\sin\delta=\frac{21}{35}=0.6,\ \cos\delta=\frac{28}{35}=0.8,\ \operatorname{tg}\delta=\frac{21}{28}=0.75,\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{28}{21}=1.\dot{3},$$
$$\sin\varepsilon=\frac{28}{35}=0.8,\ \cos\varepsilon=\frac{21}{35}=0.6,\ \operatorname{tg}\varepsilon=\frac{28}{21}=1.\dot{3},\ \operatorname{ctg}\varepsilon=\frac{21}{28}=0.75.$$

Primjer 3. Izračunajmo duljinu hipotenuze u pravokutnom trokutu ako je $\sin\beta=\frac{3}{5}$ i $b=6$.

Iz $\sin\beta=\frac{b}{c}$ je $\frac{3}{5}=\frac{6}{c}$ pa je $3c=30$, odnosno $c=10$.

Uočimo, budući da su duljine kateta manje od duljine hipotenuze, za svaki šiljasti kut vrijedi:

$$0<\sin\alpha<1 \text{ i } 0<\cos\alpha<1.$$

Vrijednosti funkcija tangens i kotangens šiljastog kuta mogu biti svi realni brojevi veći od nule:

$$0<\operatorname{tg}\alpha<+\infty \text{ i } 0<\operatorname{ctg}\alpha<+\infty.$$

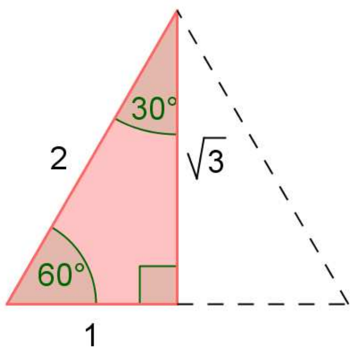
Primjer 4. Koji od brojeva $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{10}}{10}$, π, $\frac{1}{100}$ može biti sinus kuta?

Budući da je $0<\sin\alpha<1$, sinus kuta mogu biti brojevi: $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{10}}{10}$ i $\frac{1}{100}$.

4.2. VRIJEDNOSTI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA KUTOVA OD 30°, 45° I 60°

Vrijednosti trigonometrijskih funkcija kutova od $30°$, $45°$ i $60°$ možemo lako izračunati. U tu svrhu koristimo se istaknutim pravokutnim trokutima: polovicom jednakostraničnog trokuta stranice duljine 2 i polovicom jediničnog kvadrata

Povučemo li visinu jednakostraničnog trokuta stranice duljine 2, dobivamo pravokutan trokut kojemu je duljina hipotenuze 2, a duljine kateta 1 i $\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$, pogledajmo sliku:



Prema definiciji trigonometrijskih funkcija dobivamo:

$\sin 30° = \frac{1}{2}$,

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\operatorname{ctg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$,

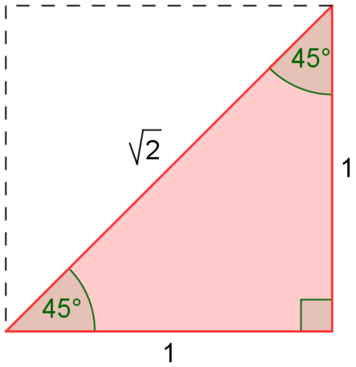
$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos 60° = \frac{1}{2}$,

$\operatorname{tg} 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$,

$\operatorname{ctg} 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Podijelimo li jedinični kvadrat dijagonalom na dva dijela, dobivamo jednakokračan pravokutan trokut, tj. pravokutan trokut kojemu su šiljasti kutovi mjere $45°$, pogledajmo sliku:



Prema definiciji trigonometrijskih funkcija dobivamo:

$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\operatorname{tg} 45° = \frac{1}{1} = 1$,

$\operatorname{ctg} 45° = \frac{1}{1} = 1$,

Dobivene rezultate pregledno zapisujemo u tablicu:

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

tablica vrijednosti trigonometrijskih funkcija za poznate kutove

Primjer 1. Izračunajmo:

a) vrijednost izraza:

$$\frac{3tg^2 45°+1}{2\sin 60° - \cos 30°} = \frac{3\cdot 1^2+1}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{1}} = \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3},$$

b) vrijednost izraza $\sin^2\alpha + \cos\alpha\cdot ctg\alpha$ za $\alpha = 30°$:

$$\sin^2 30° + \cos 30°\cdot ctg 30° = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{1}{4}+\frac{3}{2} = \frac{7}{4}.$$

4.3. RAČUNANJE VRIJEDNOSTI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

računanje vrijednosti trigonomet-rijskih funkcija zadanog kuta na džepno računalo

Iako postoje tablice vrijednosti trigonometrijskih funkcija, ovdje ćemo za računanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija koristiti džepno računalo. Većina džepnih računala ima tipke SIN, COS i TAN, iznad kojih su oznake SIN^{-1}, COS^{-1} i TAN^{-1}.

Računamo li vrijednost jedne od trigonometrijskih funkcija nekog kuta zadanog u stupnjevima na zaslonu džepnog računala treba pisati oznaka DEG. Za kut zadan u radijanima treba pisati oznaka RAD.

Kada je kut zadan u stupnjevima, minutama i sekundama, treba pripaziti na njegov unos. Ako džepno računalo mjeru kuta u stupnjevima, minutama i sekundama kod računanja ne pretvara automatski u kut mjere u stupnjevima to moramo učiniti prethodno, npr. unesemo kut u obliku decimalnog broja i pritisnemo tipku koja obavlja preračunavanje.

Nakon što upišemo kut u stupnjevima, pritisnemo tipku s oznakom tražene funkcije. Tada se na zaslonu prikaže vrijednost tražene trigonometrijske funkcije.

Džepna računala nemaju oznaku za funkciju kotangens. Kotangens kuta odredimo tako da najprije odredimo njegov tangens, a zatim pritisnemo tipku 1/x ili x^{-1}. Kotangens kuta jednak je recipročnoj vrijednosti tangensa tog kuta.

Primjer 1. Pomoću džepnog računala izračunajmo:

a) $\sin 50°$

Budući da je zadan kut u stupnjevima na zaslonu džepnog računala mora pisati oznaka DEG.
Sada upišemo 50 i pritisnemo tipku SIN. Očitamo broj na 5 decimala: 0.766044 pa je $\sin 50° = 0.766044$.

b) $\cos 72°13'$

Najprije kut zadan u stupnjevima i minutama preračunamo u kut u stupnjevima ako to džepno računalo ne radi samostalno (svatko treba istražiti kako radi njegovo džepno računalo):

$$72°13' = 72.21\dot{6}°.$$

Sada upišemo 72.216666 (ostavimo dobiveni rezultat preračunavanja) i pritisnemo tipku COS. Očitamo broj na 5 decimala: 0.30542 pa je $\sin 72°13' = 0.30542$.

c) $\text{tg}\, 66°02'14''$
Kut zadan u stupnjevima, minutama i sekundama preračunamo u kut u stupnjevima:
$$66°02'14'' = 66.037\dot{2}°.$$
Sada upišemo 66.037222i pritisnemo tipku TAN. Očitamo broj na 5 decimala: 2.24997 pa je $\text{tg}\, 66°02'14'' = 2.24997$.

d) $\text{ctg}\, 15°16'$
Kut zadan u stupnjevima i minutama preračunamo u kut u stupnjevima:
$$15°16' = 15.2\dot{6}°.$$
Najprije računamo vrijednost funkcije tangens. Upišemo 15.266666 i pritisnemo tipku TAN. Dobili smo vrijednost funkcije tangens za zadani kut: 0.27294. Sada pritisnemo tipku 1/x i očitamo broj na 5 decimala: 3.66376 pa je $\text{ctg}\, 15°16' = 3.66376$.

Obrnuti problem je iz poznate vrijednosti trigonometrijske funkcije odrediti kut. U tom slučaju nakon upisane vrijednosti trigonometrijske funkcije pritisnemo tipku 2nd ili SHIFT, a zatim tipku SIN, COS ili TAN.
Računamo li kut iz vrijednosti njegovog kotangensa, tada najprije pritiskom na tipku 1/x dobijemo vrijednost tangensa traženog kuta, a onda na opisani način dobivamo traženi kut.

računanje kuta iz poznate vrijednosti trigonometrijske funkcije

Primjer 2. Izračunajmo, koristeći se džepnim računalom, kut α ako je:

a) $\sin \alpha = 0.12345$
Najprije upišemo vrijednost 0.12345, zatim pritisnemo tipku SHIFT pa tipku SIN (rezultat njihovog djelovanja je funkcija $\sin^{-1}$ koja je inverzna funkciji $\sin$). Očitamo kut u stupnjevima 7.09125° i preračunamo ga u kut u stupnjevima, minutama i sekundama. Traženi kut je $\alpha = 7°05'28''$.

b) $\cos \alpha = 0.24688$
Najprije upišemo vrijednost 0.24688, zatim pritisnemo tipku SHIFT pa tipku COS (rezultat njihovog djelovanja je funkcija $\cos^{-1}$ koja je inverzna funkciji $\cos$). Očitamo kut u stupnjevima 75.70703° i preračunamo ga u kut u stupnjevima, minutama i sekundama. Traženi kut je $\alpha = 75°42'25''$.

c) $\text{tg}\, \alpha = 2.22334$
Najprije upišemo vrijednost 2.22334, zatim pritisnemo tipku SHIFT pa tipku TAN (rezultat njihovog djelovanja je funkcija tg^{-1} koja je inverzna funkciji tg). Očitamo kut u stupnjevima 65.78304° i preračunamo ga u kut u stupnjevima, minutama i sekundama. Traženi kut je $\alpha = 65°48'58''$

d) $\text{ctg}\, \alpha = 1.3\dot{5}$
Najprije upišemo vrijednost 1.35555 i pritisnemo tipku 1/x koja nam daje vrijednost funkcije tangens: $\text{tg}\, \alpha = 0.73771$. Zatim pritisnemo tipku SHIFT pa tipku TAN. Očitamo kut u stupnjevima 36.41649° i preračunamo ga u kut u stupnjevima, minutama i sekundama. Traženi kut je $\alpha = 36°24'59''$.

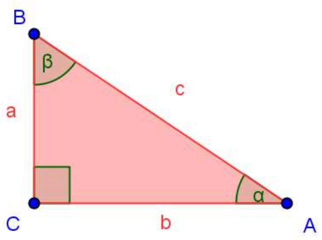
4.4. RJEŠAVANJE PRAVOKUTNOG TROKUTA

Riješiti pravokutan trokut znači izračunati duljine svih njegovih stranica i mjere svih njegovih kutova, odnosno:

1. koristeći se Pitagorinim poučkom izračunati duljinu treće stranice trokuta ako su poznate duljine preostalih dviju,
2. koristeći se činjenicom da zbroj mjera šiljastih kutova u pravokutnom trokutu iznosi 90°, tj. $\alpha + \beta = 90°$,
3. iskoristiti trigonometrijske omjere kako bi izračunali duljine preostalih stranica i mjere kutova.

pravila rješavanja pravokutnog trokuta

Primjer 1. Izračunajmo preostale elemente pravokutnog trokuta ABC kojemu je duljina hipotenuze 263 cm i mjera kuta $\beta =$ 35°48'.



Najprije skiciramo pravokutan trokut, označimo zadane i tražene elemente.
Izračunajmo mjeru drugog šiljastog kuta:

$$\alpha = 90° - \beta = 54°12'.$$

Po definiciji je $\sin\beta = \frac{b}{c}$ pa je $b = c \cdot \sin\beta = 153.84$ cm.

Slično, iz $\cos\beta = \frac{a}{c}$ slijedi $a = c \cdot \cos\beta = 213.31$ cm.

Uočimo da smo duljinu katete a mogli izračunati i primjenom Pitagorina poučka nakon što smo izračunali duljinu katete b, ali u tom bi slučaju u računu koristili međurezultat u kojemu može nastati greška. Na ovaj način koristili smo samo ulazne podatke i time smanjili mogućnost pogreške.

Primjer 2. Izračunajmo preostale elemente pravokutnog trokuta ABC kojemu su duljine kateta 2.3 cm i 3.1 cm.

Koristimo skicu iz prethodnog primjera. Neka je $a = 2.3$ cm i $b = 3.1$ cm.
Sada iz $tg\alpha = \frac{a}{b} = \frac{2.3}{3.1} = 0.74194$ dobivamo $\alpha = 36°34'22''$.
Dalje nalazimo drugi šiljasti kut $\beta = 90° - \alpha = 53°25'38''$.
Odredimo duljinu hipotenuze primjenom Pitagorina poučka:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 3.86 \text{ cm}.$$

Primjer 3. Izračunajmo ostale elemente i površinu pravokutnog trokuta ABC kojemu je zadano $a = 73.4$ cm i $\alpha =$ 58°24'.

Ponovo koristimo skicu iz *Primjera 1*. Odredimo najprije mjeru drugog šiljastog kuta: $\beta = 90° - \alpha = 31°36'$.

Sada iz $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ slijedi $c = \frac{a}{\sin\alpha} = 86.18$ cm.

Iz $tg\alpha = \frac{a}{b}$ slijedi $b = \frac{a}{tg\alpha} = 45.16$ cm.

Površina zadanog trokuta je: $P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{73.4 \cdot 45.16}{2} = 1657.372$ cm².

Primjer 4. Izračunajmo ostale elemente pravokutnog trokuta ako je $a = 2.5$ cm i $c = 13$ cm.

I ovdje će nam poslužiti skica iz *Primjera 1*. Primjenom Pitagorina poučka izračunajmo duljinu druge katete: $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 12.76$ cm.

Dalje, iz $\sin\alpha = \frac{a}{c} = 0.19231$ slijedi $\alpha = 11°05'14''$.

Na kraju, $\beta = 90° - \alpha = 78°54'46''$.

4.5. PRIMJENA RJEŠAVANJA PRAVOKUTNOG TROKUTA

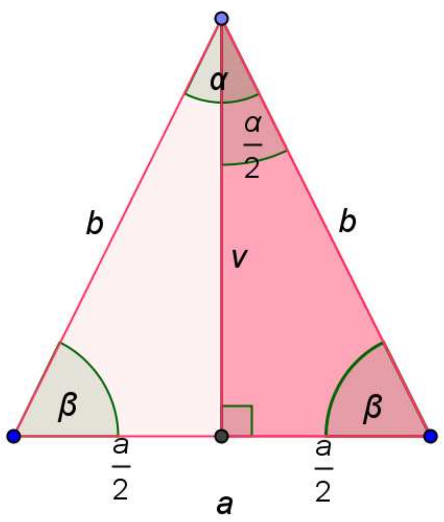
Rješavanje pravokutnog trokuta često se primjenjuje u matematici, ali i u mnogim situacijama u svakodnevnom životu.

Pogledajmo najprije nekoliko primjera primjene u planimetriji.

primjena rješavanja pravokutnog trokuta u planimetriji

Primjer 1. Izračunajmo opseg i površinu jednakokračnog trokuta ako je mjera kuta uz njegovu osnovicu $43°34'$, a duljina kraka 4.6 cm.

Skicirajmo najprije jednakokračan trokut i označimo ga:



U oznakama sa skice zadano je: $a = 4.6$ cm i $\beta = 43°34'$.
Visinom smo jednakokračan trokut podijelili na dva sukladna pravokutna trokuta.
Iz osjenčanog pravokutnog trokuta dobivamo:

$\cos\beta = \frac{\frac{a}{2}}{b}$ iz čega je:

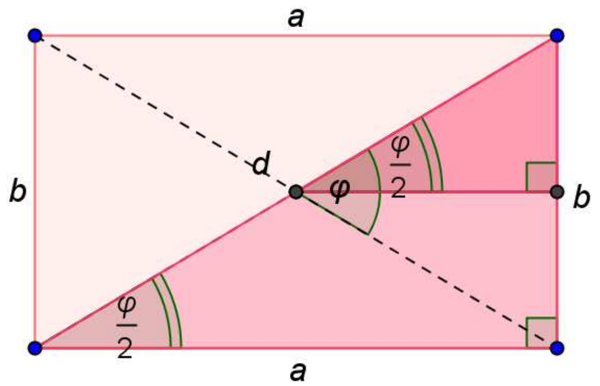
$$b = \frac{\frac{a}{2}}{\cos\beta} = \frac{2.3}{\cos 43°34'} = 3.17 \text{ cm.}$$

Slično je: $tg\beta = \frac{v}{\frac{a}{2}}$ iz čega slijedi $v = \frac{a}{2}\cdot tg\beta = 2.3\cdot tg\,43°34' = 2.19$ cm.

Sada je $o = a + 2b = 4.6 + 2\cdot 3.17 = 10.94$ cm i $P = \frac{a\cdot v}{2} = \frac{4.6\cdot 2.19}{2} = 5.037$ cm².

Primjer 2. Koliki je kut među dijagonalama pravokutnika ako je duljina jedne njegove stranice 10 cm, a duljina njegove dijagonale 12 cm?

Skicirajmo i označimo zadani pravokutnik:



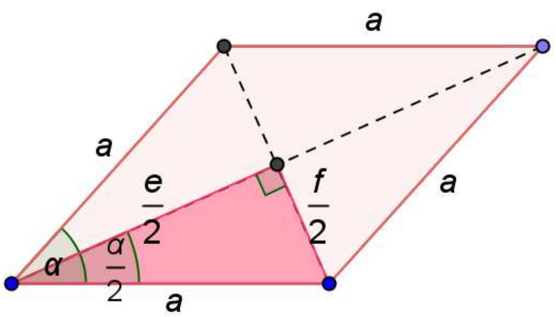
Uz oznake sa skice zadano je $a=10$ cm i $d=12$ cm.

Uočimo na skici dva istaknuta pravokutna trokuta. Oni su slični pa se kut mjere $\frac{\varphi}{2}$ pojavljuje i u većem pravokutnom trokutu.

Zato vrijedi $\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{a}{d}=\frac{10}{12}=0.8\dot{3}$ pa je $\frac{\varphi}{2}=33°33'26''$, odnosno $\varphi=67°06'52''$.

Primjer 3. Odredimo opseg romba ako je duljina njegove kraće dijagonale 22 cm, a mjera njegovog šiljastog kuta $78°$.

Skicirajmo i označimo zadani romb:



Sjetimo se najprije da se dijagonale romba međusobno raspolavljaju i sijeku pod pravim kutom. Uočimo istaknuti pravokutni trokut.

Prema oznakama sa skice zadano je $f=22$ cm i $\alpha=78°$.

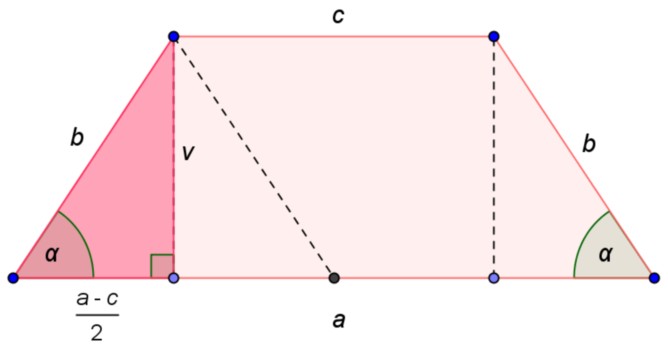
Sada imamo: $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{f}{2}}{a}$ pa je

$$a=\frac{\frac{f}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{11}{\sin 39°}=17.48\text{ cm.}$$

Slijedi $o=4a=4\cdot 17.48=69.92$ cm.

Primjer 4. Izračunaj opseg i površinu jednakokračnog trapeza ako su duljine njegovih osnovica 16 cm i 10 cm i mjera šiljastog kuta $69°25'$.

Skicirajmo i označimo zadani trapez:



Prema oznakama sa skice zadano je $a=16$ cm, $c=10$ cm i $\alpha=69°25'$.

Uočimo osjenčani pravokutan trokut. Njegove su katete duljine v i $\frac{a-c}{2}$, a hipotenuza duljine b.

Imamo: $\cos\alpha = \frac{\frac{a-c}{2}}{b}$ iz čega dobivamo $b = \frac{\frac{a-c}{2}}{\cos\alpha} = \frac{3}{\cos 69°25'} = 8.53$ cm.

Slično, iz $tg\alpha = \frac{v}{\frac{a-c}{2}}$ slijedi $v = \frac{a-c}{2} \cdot tg\alpha = 3 \cdot tg 69°25' = 7.99$ cm.

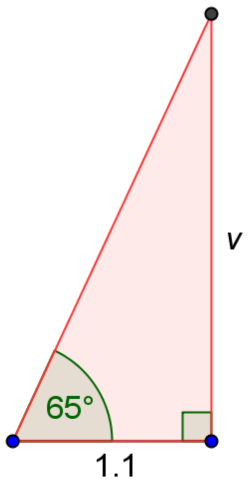
Sada je $o = a + 2b + c = 16 + 2 \cdot 8.53 + 10 = 43.06$ cm i

$P = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{16+10}{2} \cdot 7.99 = 103.87$ cm².

Pogledajmo sada nekoliko zadataka primjene rješavanja pravokutnog trokuta na situacije iz svakodnevnog života.

Primjer 5. Na ulici stoji čovjek. Sunčeve zrake padaju pod kutom $65°$ i njegova je sjena duga 1.27 m. Kako je ime tom čovjeku ☺?

primjena rješavanja pravokutnog trokuta u realnom životu



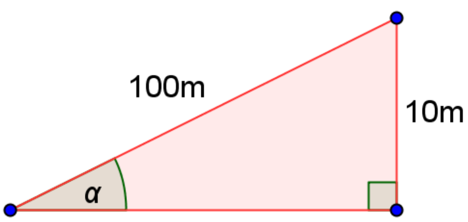
Pogledajmo skicu zadatka. Ovdje je riječ o matematičkom modeliranju, odnosno situaciju iz realnog svijeta zapisujemo matematičkim jezikom.

Prema definiciji funkcije tangens slijedi:

$tg 65° = \frac{v}{1.27}$ pa je $v = 1.27 \cdot tg 65° \approx 2.72$ m.

Ime tom čovjeku je Robert Pershing Wadlow i on je prema Guinnessovoj knjizi rekorda najviši čovjek na svijetu ikad izmjeren.

Primjer 6. Uspon ceste od $p\%$ znači da se cesta na putu od 100 metara uspinje p metara. Pod kojim se kutom uspinje cesta ako je njezin uspon 10%?



Iz definicije funkcije sinus slijedi:

$\sin\alpha = \frac{10}{100} = 0.1$ pa je

$\alpha = 5°44'21''$.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Izračunajte nepoznate elemente i površinu pravokutnog trokuta *ABC* ako:
   a) $b = 15.5$ cm i $\alpha = 46°34'$,
   b) $a = 28.5$ cm i $b = 41.4$ cm.
2. Odredite mjere šiljastih kutova pravokutnog trokuta ako je omjer duljina njegovih kateta 20:30.
3. Izračunajte površinu jednakokračnog trokuta ako je mjera kuta uz njegovu osnovicu 73°48', a duljina njegove osnovice 6. 3 cm.

4. Koliki je kut među dijagonalama pravokutnika kojemu je duljina dijagonale 5 cm, a duljina jedne njegove stranice 4 cm?
5. Odredite mjeru šiljastog kuta romba kojemu je duljina jedne njegove dijagonale 32 cm, a površina 672 cm².
6. Izračunajte opseg i površinu jednakokračnog trapeza ako su duljine njegovih osnovica 10 cm i 6 cm i mjera šiljastog kuta 50°50'.
7. Ako jedna stuba ima visinu 12 cm, a širinu 26 cm, pod kojim se kutom uspinjemo hodajući po stubištu?
8. Do koje visine možemo popeti ljestvama dugačkim 20 m ako je kut pod kojim prislanjamo ljestve na zid 55°?
9. Vrh tornja vidi se pod kutom elevacije od 17° i z točke udaljene 132 m od podnožja tornja. Odredite visinu tornja.

5. EKSPONENCIJALNE I LOGARITAMSKE FUNKCIJE

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:
1. *Koju funkciju nazivamo eksponencijalnom, a koju logaritamskom? Koja su njihova svojstva?*
2. *Što su logaritmi i kako računamo s logaritmima?*
3. *Kako rješavamo logaritamske jednadžbe i nejednadžbe?*

5.1. EKSPONENCIJALNE FUNKCIJE

Eksponencijalna funkcija s bazom b jest realna funkcija oblika

$$f(x)=b^x,$$

gdje je $b>0$ i $b\neq 1$.

eksponeneci-jalna funkcija

Primjeri eksponencijalnih funkcija su npr. funkcije:

$$f(x)=3^x,\ f(x)=10^x,\ f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x,\ f(x)=\sqrt{2}^x.$$

Primjere eksponencijalnih funkcija vežemo uz veličine koje jako brzo ili rastu ili padaju.
Svojstva eksponencijalnih funkcija analizirat ćemo iz njihovog grafa.

Primjer 1. Nacrtajmo grafove eksponencijalnih funkcija:

a) $f(x)=2^x$,

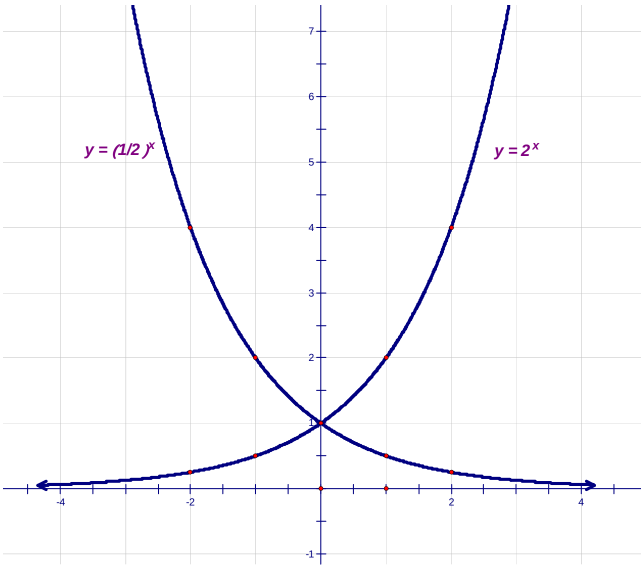
b) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Odredimo najprije nekoliko točaka traženih grafova:

x	0	1	2	-1	-2
$f(x)=2^x$	1	2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

x	0	1	2	-1	-2
$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	2	4

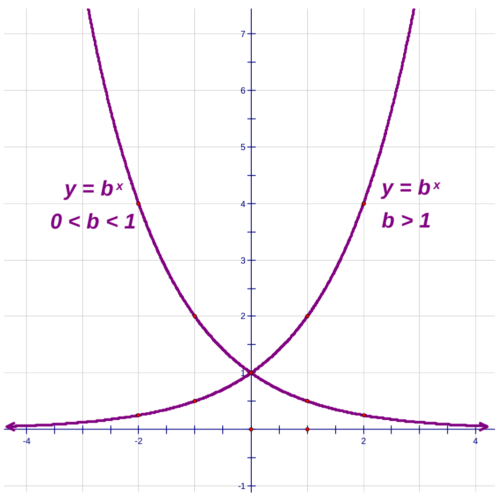
U istom koordinatnom sustavu nacrtajmo sada grafove zadanih funkcija:



Zorni prikaz daje nam osnovna svojstva eksponencijalnih funkcija:

svojstva eksponencijalne funkcije

1. Područje definicije (domena) eksponencijalne funkcije $f(x)=b^x$ jest cijeli skup $\mathbf{R}$, a područje vrijednosti (kodomena) skup pozitivnih realnih brojeva $\mathbf{R}^+=\langle 0,+\infty\rangle$.
2. Eksponencijalna funkcija $f(x)=b^x$ za:
   a) $b>1$ raste, tj. za $x_1<x_2$ vrijedi $b^{x_1}<b^{x_2}$,
   b) $0<b<1$ pada, tj. za $x_1<x_2$ vrijedi $b^{x_1}>b^{x_2}$.
3. Graf $y=b^x$ siječe y-os u točki $(0,1)$.
4. Graf $y=b^x$ ne siječe x-os nego joj se asimptotski približava.



5.2. EKSPONENCIJALNE JEDNADŽBE

eksponencijalna jednadžba

Jednadžba u kojoj se nepoznanica nalazi u eksponentu potencije naziva se **eksponencijalna jednadžba**.

Tako je

$$3^x = 3^6$$

primjer eksponencijalne jednadžbe i njezino je rješenje očigledno: $x = 6$.

pravilo za rješavanje eksponencijalne jednadžbe

Ako eksponencijalnu jednadžbu možemo svesti na jednakost dviju potencija jednakih baza tj. na oblik:

$$b^{f(x)} = b^{g(x)},$$

pri čemu je $b > 0$ i $b \neq 1$, onda je

$$f(x) = g(x).$$

Dobivena jednadžba, koja je u našim primjerima linearna ili kvadratna, daje sva rješenja zadane eksponencijalne jednadžbe.

Primjer 1. Riješimo eksponencijalne jednadžbe:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{1+2x} = \frac{9}{4}$

Zapišimo najprije lijevu i desnu stranu jednadžbe kao potencije s jednakom bazom:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1+2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}.$$

Slijedi:

$$1 + 2x = -2,$$

pa je

$$x = -\frac{3}{2}.$$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{7-x} = 25^{5x-2}$

I ovdje lijevu i desnu stranu jednadžbe zapisujemo u obliku potencija s jednakom bazom:

$$\left(5^{-1}\right)^{7-x} = \left(5^2\right)^{5x-2},$$

odnosno:

$$5^{-7+x} = 5^{10x-4}.$$

Slijedi:

$$-7 + x = 10x - 4,$$

pa je

$$x = -\frac{1}{3}.$$

c) $0.5 \cdot \sqrt[4]{8^{2x+3}} = 16^{-x+1}$

Kao i ranije, zapišimo lijevu i desnu stranu jednadžbe kao potencije s jednakom bazom:

$$2^{-1}\cdot\sqrt[4]{\left(2^3\right)^{2x+3}}=\left(2^4\right)^{-x+1},$$

odnosno:

$$2^{-1}\cdot 2^{\frac{6x+9}{4}}=2^{-4x+4}.$$

Množenjem potencija jednakih baza na lijevoj strani dobivamo:

$$2^{-1+\frac{6x+9}{4}}=2^{-4x+4}.$$

Slijedi:

$$-1+\frac{6x+9}{4}=-4x+4,$$

odnosno

$$-4+6x+9=-16x+16$$

pa je

$$x=\frac{1}{2}.$$

Primjer 2. Riješimo eksponencijalnu jednadžbu: $3^{x+1}-2\cdot 3^{x-1}=21$.

Potencije koje se pojavljuju u jednadžbi nemaju jednake eksponente pa ih ne možemo oduzimati. Pokušajmo malo transformirati jednadžbu:

$$3^x\cdot 3-2\cdot 3^x\cdot\frac{1}{3}=21,$$

odnosno

$$3\cdot 3^x-\frac{2}{3}\cdot 3^x=21.$$

Sada potencije na lijevoj strani možemo oduzeti. Oduzimanjem dobivamo:

$$\frac{7}{3}\cdot 3^x=21$$

te je

$$3^x=9,$$

odnosno

$$3^x=3^2$$

pa je

$$x=2.$$

Primjer 3. Riješimo eksponencijalnu jednadžbu: $2^{2x-2}-2^{x-1}=12$.

Zapišimo najprije jednadžbu u obliku $\frac{1}{4}\cdot 2^{2x}-\frac{1}{2}\cdot 2^x=12$. Uvedemo li sada supstituciju $t=2^x$, eksponencijalna jednadžba prelazi u kvadratnu:

$$\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{2}t-12=0,$$

tj. jednadžbu:
$t^2-2t-48=0$,
čija su rješenja $t_1=8$ i $t_2=-6$.
Sada se vrstimo u supstituciju i riješimo jednadžbe:

$$2^x=8 \text{ i } 2^x=-6.$$

Rješenje prve jednadžbe je $x=3$, dok druga jednadžba nema rješenja.

5.3. EKSPONENCIJALNE NEJEDNADŽBE

Sjetimo se svojstva eksponencijalne funkcije koje govori o njezinom rastu ili padu – eksponencijalna funkcija $f(x)=b^x$ za:

a) $b>1$ raste, tj. za $x_1<x_2$ vrijedi $b^{x_1}<b^{x_2}$,

b) $0<b<1$ pada, tj. za $x_1<x_2$ vrijedi $b^{x_1}>b^{x_2}$.

Zbog toga, očigledno vrijedi:

$$2^9<2^{13},\ 10^3<10^7,\ \left(\frac{5}{2}\right)^8<\left(\frac{5}{2}\right)^{10}\ \text{te:}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^9>\left(\frac{1}{2}\right)^{13},\ 0.1^3>0.1^7,\ \left(\frac{2}{5}\right)^8>\left(\frac{2}{5}\right)^{10}.$$

Ako eksponencijalnu nejednadžbu možemo svesti na oblik:

$$b^{f(x)}<b^{g(x)}\ (b^{f(x)}>b^{g(x)}),$$

onda za:

a) $b>1$ vrijedi $f(x)<g(x)$ ($f(x)>g(x)$) ,

b) $0<b<1$ vrijedi $f(x)>g(x)$ ($f(x)<g(x)$),

pri čemu je $b>0$ i $b\neq 1$.

pravilo za rješavanje eksponenci-jalne nejednadžbe

Primjer 1. Riješimo eksponencijalne nejednadžbe:

a) $2^{2x+3}>4$

Slijedi

$$2^{2x+3}>2^2.$$

Budući da je $b=2>1$, dobivamo:

$$2x+3>2$$

te je

$$x>-\frac{1}{2},$$

odnosno $x\in\left\langle -\frac{1}{2},+\infty\right\rangle$.

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x>\left(\frac{1}{9}\right)^5$

Slijedi

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x>\left(\frac{1}{3}\right)^{10}.$$

Budući da je $0<b=\frac{1}{3}<1$, dobivamo:

$$x<10,$$

odnosno $x\in\langle -\infty,10\rangle$.

c) $0.1^{3x-2}<1000$

Lijevu i desnu stranu nejednadžbe zapišimo kao potencije s jednakom bazom:

$$\left(10^{-1}\right)^{3x-2}>10^3,$$

odnosno

$$10^{-3x+2} > 10^3$$

Budući da je $b = 10 > 1$, dobivamo:

$$-3x + 2 > 3$$

te je

$$x < -\frac{1}{3},$$

odnosno $x \in \left\langle -\infty, -\frac{1}{3} \right\rangle$.

5.4. LOGARITMI

U odjeljku 5.2. naučili smo rješavati neke jednostavnije eksponencijalne jednadžbe. Pogledajmo sada jednadžbu:

$$2^x = 5.$$

Budući da desnu stranu jednadžbe ne možemo zapisati kao potenciju s bazom 2, ovu jednadžbu ne možemo riješiti na način na koji smo eksponencijalne jednadžbe rješavali ranije. Da bismo riješili ovu i njoj slične jednadžbe, najprije moramo objasniti pojam logaritma.

Logaritam po pozitivnoj bazi b $(b \neq 1)$ pozitivnog broja y označavamo $\log_b y$. To je eksponent x sa svojstvom $b^x = y$. Dakle,

$$\log_b y = x \Leftrightarrow b^x = y,$$

$$b > 0,\ b \neq 1,\ y > 0,\ x \in \mathbf{R}.$$

logaritam

Riječima, logaritam pozitivnog broja y je eksponent x kojim treba potencirati poznatu bazu b da bi dobili potenciju y.

Slijedi da je rješenja jednadžbe iz uvoda $x = \log_2 5$. Približnu vrijednost realnog broja $\log_2 5$ naučit ćemo, uz formule za promjenu baze logaritma, računati na kalkulator. Ona iznosi, zaokružena na 5 decimala, 2.32193. Napravimo li provjeru, dobivamo: $2^{2.32193} = 5.0000066$.

Logaritam po bazi 10 nazivamo **dekadski logaritam** i označavamo $\log_{10} x = \log x$, a logaritam po bazi $e \approx 2.718281828459...$ nazivamo **prirodni logaritam** i označavamo $\log_e x = \ln x$.

dekadski logaritam

prirodni logaritam

Primjer 1. Odredimo x ako je:

a) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[5]{2} = x$

Po definicije logaritma vrijedi:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt[5]{2},$$

pa je

$$2^{-x} = 2^{\frac{1}{5}}$$

iz čega je $x = -\frac{1}{5}$.

b) $\log_x \frac{1}{81} = -4$

Po definicije logaritma vrijedi:

$$x^{-4} = \frac{1}{81},$$

odnosno

$$x^{-4} = 3^{-4}$$

iz čega slijedi $x = 3$.

c) $\log_7 (3x - 2) = 1$

Iz definicije logaritma slijedi:

$$7^1 = 3x - 2,$$

pa je

$$3x = 9$$

i $x = 3$.

Ovdje treba pripaziti na početni uvjet o kojemu će biti riječ u odjeljku *Logaritamske jednadžbe*. Po definiciji logaritma mora vrijediti $3x - 2 > 0$, odnosno $x > \frac{2}{3}$ što je ispunjeno.

Izravna posljedica gornjih formula su dvije formule bitne u računanju logaritama:

$$\log_b y = \log_b b^x = x \text{ i}$$

$$b^x = b^{\log_b y} = y.$$

Dakle,

$$\log_b b^x = x$$

i

$$b^{\log_b y} = y.$$

Primjer 2. Izračunajmo:

a) $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$ (uočimo da do jednakog rezultata dolazimo postupimo li kao u primjeru 1. a)),

b) $\log_3 \frac{1}{27} = \log_{3-} 3^{-3} = 3$,

c) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \log_2 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$,

d) $\log_{\frac{1}{4}} 64 = \log_{\frac{1}{4}} 4^3 = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = -3$,

e) $\log 100 = \log 10^2 = 2$,

f) $\log_7 7 = \log_7 7^1 = 1$,

g) $\log_5 1 = \log_5 5^0 = 0$.

Iz f) i g) dijela primjer 2. zaključujemo:

$$\log_b b = 1 \text{ jer je } b^1 = b$$

i

$$\log_b 1 = 0 \text{ jer je } b^0 = 1,$$

gdje je b pozitivan realan broj, $b > 0$ i $b \neq 1$.

Primjer 3. Izračunajmo:

a) $4^{\log_4 3} = 3$,

b) $25^{\log_5 2} = \left(5^2\right)^{\log_5 2} = \left(5^{\log_5 2}\right)^2 = 2^2 = 4$,

c) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\log_3 5} = \left(3^{-3}\right)^{-\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^3 = 5^3 = 125$.

Primjer 4. Izračunajmo:

$$\log_2 \frac{1}{64} - 7 \cdot \log_{11} 11 + \log_7 1 - 3 \cdot \log_{13} 13^{-4} = \log_2 2^{-6} - 7 \cdot 1 + 0 - 3 \cdot (-4) =$$
$$= -6 - 7 + 12 = -1.$$

5.5. PRAVILA ZA RAČUNANJE S LOGARITMIMA

Budući da su logaritmi eksponenti, pravila za računanje s potencijama mogu se iskazati i kao **pravila za računanje s logaritmima**.

Neka je $m, n > 0$, $b > 0$ i $b \neq 1$. Tada vrijedi:

1. $\log_b (m \cdot n) = \log_b m + \log_b n$,
2. $\log_b \left(\frac{m}{n}\right) = \log_b m - \log_b n$,
3. $\log_b m^r = r \cdot \log_b m$.

pravila za računanje s logaritmima

Formule za promjenu baze logaritma

Neka su $a, b, c > 0$ i $a, b \neq 1$. Tada vrijedi:

1. $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b} \quad \Rightarrow \quad \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$,
2. $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$,
3. $\log_{b^k} c = \frac{1}{k} \log_b c$.

formule za promjenu baze logaritma

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $\log_{12} 3 + \log_{12} 4 = \log_{12} (3 \cdot 4) = \log_{12} 12 = 1$,

b) $\log_7 147 - \log_7 3 = \log_7 \frac{147}{3} = \log_7 49 = \log_7 7^2 = 2$,

c) $\dfrac{\log_3 324}{2+\log_3 2} = \dfrac{\log_3 16^2}{\log_3 8+\log_3 2} = \dfrac{2\cdot\log_3 16}{\log_3 16} = 2$,

d) $\dfrac{\log 108 + 3\log\frac{1}{3}}{\log 40 - \log 5} = \dfrac{\log 108 + \log\left(\frac{1}{3}\right)^3}{\log\frac{40}{5}} = \dfrac{\log\left(108\cdot\frac{1}{27}\right)}{\log 8} = \dfrac{\log 4}{\log 8} = \dfrac{\log 2^2}{\log 2^3} =$

$= \dfrac{2\log 2}{3\log 2} = \dfrac{2}{3}$,

e) $\log_8 27\cdot\log_3 2 = \log_8 3^3\cdot\log_3 2 = 3\log_8 3\cdot\log_3 2 = 3\log_8 2 = 3\log_{2^3} 2 =$

$= 3\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\log_2 2 = 1$.

Primjer 2. Primjenom pravila za računanje logaritmima zapišimo kao zbroj i/ili razliku logaritama pomnoženih realnim brojem:

a) $\log_5\left(x^2y^4\right) = \log_5 x^2 + \log_5 y^4 = 2\log_5 x + 4\log_5 y$,

b) $\log_2\dfrac{a^{10}}{b^5} = \log_2 a^{10} - \log_2 b^5 = 10\log_2 a - 5\log_2 b$,

c) $\log_3\left(81\cdot\sqrt[5]{a^4b}\right) = \log_3 81 + \log_3 a^{\frac{4}{5}} + \log_3 b^{\frac{1}{5}} = 4 + \dfrac{4}{5}\log_3 a + \dfrac{1}{5}\log_3 b$,

d) $\log\dfrac{1000a^9b^7}{c^5d^3} = \log\left(1000a^9b^7\right) - \log\left(c^5d^3\right) =$

$= \log 1000 + \log a^9 + \log b^7 - \left(\log c^5 + \log d^3\right) =$

$= 3 + 9\log a + 7\log b - 5\log c - 3\log d$.

U idućem primjeru, koji je važna priprema za rješavanje logaritamskih jednadžbi i nejednadžbi, pogledajmo drugi smjer primjene formula:

Primjer 3. Primjenom pravila za računanje logaritmima zapišimo pod jednim logaritmom i sredi izraz:

a) $4\log_3 x + 5\log_3\sqrt[5]{y} = \log_3 x^4 + \log_3\sqrt[5]{y}^{\,5} = \log_3\left(x^4y\right)$,

b) $\dfrac{1}{2}\log x^4 - \dfrac{1}{3}\log x^3 = \log\left(x^4\right)^{\frac{1}{2}} - \log\left(x^3\right)^{\frac{1}{3}} = \log x^2 - \log x = \log\dfrac{x^2}{x} = \log x$,

c) $3\log_2 5 + 4\log_2 x^6 - \dfrac{1}{6}\log_2 x^6y^{12} = \log_2 5^3 + \log_2\left(x^6\right)^4 - \log_2\left(x^6y^{12}\right)^{\frac{1}{6}} =$

$= \log_2 125 + \log_2 x^{24} - \log_2\left(xy^2\right) = \log_2\left(125x^{24}\right) - \log_2\left(xy^2\right) =$

$= \log_2\dfrac{125x^{24}}{xy^2} = \log_2\dfrac{125x^{23}}{y^2}$,

d) $2 + \log_5\left(x^2-25\right) - 2\log_5(x-5) = \log_5 5^2 + \log_5\left(x^2-25\right) - \log_5(x-5)^2 =$

$= \log_5\left(25\left(x^2-25\right)\right) - \log_5(x-5)^2 = \log_5\dfrac{25(x-5)(x+5)}{(x-5)^2} = \log_5\dfrac{25(x+5)}{(x-5)}$.

Izračunavanje logaritama

Formule za promjenu baze važne su jer nam razne tablice i džepna računala najčešće omogućavaju izračunavanje logaritama samo po dvije baze – po bazi 10 i bazi e.

Logaritam broja najlakše određujemo pomoću džepnog računala. Nakon upisivanja broja čiji logaritam tražimo, pritisnemo točku s oznakom **log** i na zaslonu pročitamo dobiveni broj. Dobiveni broj je logaritam po bazi 10 od upisanog broja. Želimo li izračunati logaritam po bazi e pritisnemo tipku **ln**.

izračuna-vanje logaritama

Primjer 1. Izračunajmo pomoću džepnog računala (rezultat zaokružujemo na 5 decimala):

a) $\log 2 = 0.30103$,
b) $\log 246 = 2.39094$,
c) $\log 0.035 = -1.45593$,
d) $\ln 5.5 = 1.70475$,
e) $\ln \frac{1}{5} = -1.60944$.

Želimo li izračunati logaritam po nekoj drugoj po volji odabranoj, bazi, koristit ćemo formule za promjenu baze logaritma.

Primjer 2. Izračunajmo:

a) $\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{0.69897}{0.30103} = 2.32193$,
b) $\log_{11} 3 = \frac{\log 3}{\log 11} = \frac{0.47712}{1.04139} = 0.45816$.

5.6. LOGARITAMSKE FUNKCIJE

Logaritamska funkcija s bazom b jest realna funkcija oblika:

$$f(x) = \log_b x,$$

gdje je $b > 0$ i $b \neq 1$. Po definiciji logaritma, nužno je $x > 0$.

logaritamska funkcija

Logaritamska funkcija pozitivnom realnom broju pridružuje njegov logaritam.

Primjeri eksponencijalnih funkcija su npr. funkcije:

$$f(x) = \log_3 x,\ f(x) = \log x,\ f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x,\ f(x) = \log_{\sqrt{2}} x.$$

Svojstva logaritamskih funkcija analizirat ćemo iz njihovog grafa.

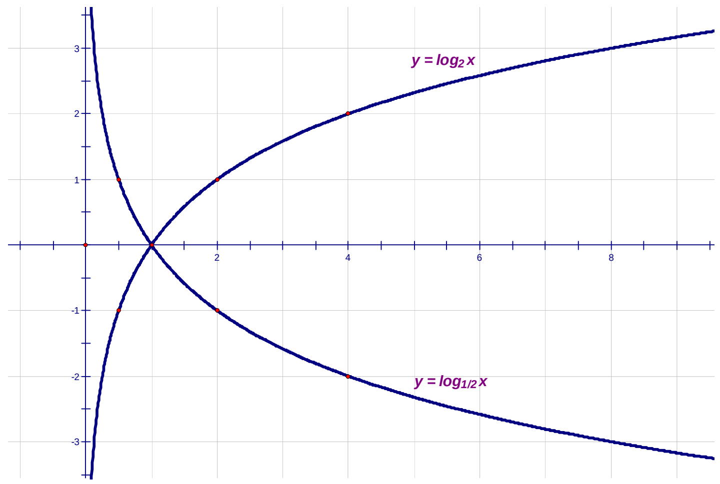
Primjer 1. Nacrtajmo grafove logaritamskih funkcija:
a) $f(x) = \log_2 x$,
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Odredimo najprije nekoliko točaka traženih grafova:

x	1	2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$f(x)=\log_2 x$	0	1	2	-1	-2

x	1	2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$	0	-1	-2	1	2

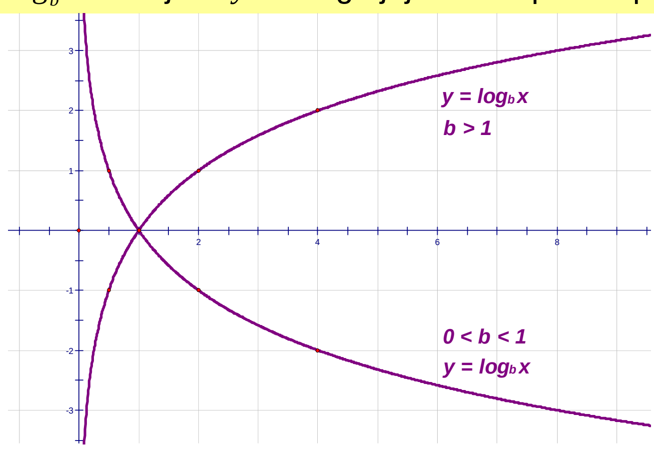
U istom koordinatnom sustavu nacrtajmo sada grafove zadanih funkcija:



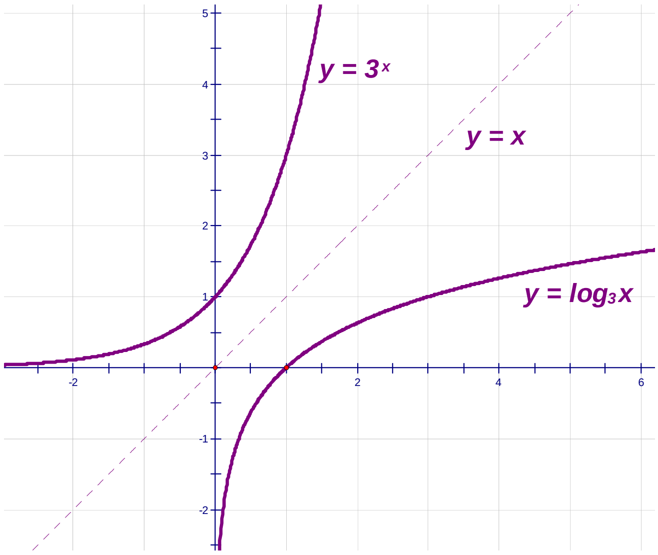
Zorni prikaz daje nam osnovna svojstva logaritamskih funkcija:

1. Područje definicije (domena) logaritamske funkcije $f(x)=\log_b x$ jest skup pozitivnih realnih brojeva $\mathbf{R}^+=\langle 0,+\infty\rangle$, a područje vrijednosti (kodomena) čitavi skup realnih brojeva $\mathbf{R}$.
2. Logaritamska funkcija $f(x)=\log_b x$ za:
   a) $b>1$ raste, tj. za $x_1<x_2$ vrijedi $\log_b x_1<\log_b x_2$,
   b) $0<b<1$ pada, tj. za $x_1<x_2$ vrijedi $\log_b x_1>\log_b x_2$.
3. Graf $y=\log_b x$ siječe x-os u točki $(1,0)$.
4. Graf $y=\log_b x$ ne siječe y-os nego joj se asimptotski približava.

svojstva logaritamske funkcije



Logaritamska funkcija s bazom b i eksponencijalna funkcija s bazom b međusobno su inverzne. Naime, ako je $y = b^x$, onda je $x = \log_b y$ i obrnuto. Grafovi međusobno inverznih funkcija simetrični su s obzirom na simetralu I. i III. kvadranta, npr:



5.7. LOGARITAMSKE JEDNADŽBE

Jednadžba u kojoj se nepoznanica nalazi pod znakom logaritma naziva se **logaritamska jednadžba**.

logaritamska jednadžba

Ako jednadžba sadrži samo jedan logaritam, obično ju je lako riješiti po definiciji logaritma.

Primjer 1. Riješimo jednadžbu: $\log_2(x-1) = 3$.
Iz definicije logaritma slijedi:

$$2^3 = x - 1,$$

odnosno

$$x = 9.$$

Budući da je logaritam definiran samo za pozitivne realne brojeve, kod rješavanja logaritamske jednadžbe nužna je **provjera rješenja** ili **provjera početnog uvjeta**.

provjera rješenja

početni uvjet

Ovdje provjera rješenja uvrštavanjem u jednadžbu daje:

$$\log_2(9-1) = \log_2 8 = 3$$

što je točno.
Drugi način je zapisati početni uvjet. Za danu jednadžbu on je $x - 1 > 0$, odnosno $x > 1$ koji je za $x = 9$ ispunjen.

Općenito, ako logaritamsku jednadžbu možemo svesti na oblik:

$$\log_b f(x) = a ,$$

pri čemu je $b > 0$ i $b \neq 1$, onda je

$$f(x) = b^a .$$

Nužno je $f(x) > 0$.

pravila za rješavanje logaritamskih jednadžbi

Ako se u jednadžbi pojavljuje više logaritama, koristimo pravilo:

Ako logaritamsku jednadžbu možemo svesti na oblik:

$$\log_b f(x) = \log_b g(x),$$

pri čemu je $b > 0$ i $b \neq 1$, onda je

$$f(x) = g(x).$$

Ovdje je nužno $f(x) > 0$ i $g(x) > 0$.

Dobivena jednadžba, koja je u našim primjerima linearna ili kvadratna, daje sva rješenja zadane logaritamske jednadžbe.

Da bi lijevu i desnu stranu zapisali pod jednim logaritmom služimo se pravilima za računanje s logaritmima koja smo uvježbavali u točki 5.5.

Primjer 1. Riješimo logaritamske jednadžbe:

a) $\log_3(x-2) = \log_3(4-x)$

Prema zapisanom pravilu imamo

$$x - 2 = 4 - x ,$$

pa je

$$x = 3 .$$

Ovdje su početni uvjeti: $x - 2 > 0$, odnosno $x > 2$ i $4 - x > 0$, odnosno $x < 4$ što je za $x = 3$ ispunjeno.

b) $\log(x+9) - \log(x-3) = 1 - \log 5$

Zapišimo lijevu i desnu stranu jednadžbe pod jednim logaritmom primjenom pravila za računanje logaritmima:

$$\log\frac{x+9}{x-3} = \log 10 - \log 5 ,$$

odnosno:

$$\log\frac{x+9}{x-3} = \log\frac{10}{5} .$$

Sada je:

$$\frac{x+9}{x-3} = 2 .$$

Slijedi:

$$x + 9 = 2 \cdot (x-3)$$

pa je

$$x = 15 .$$

Ispitajmo početne uvjete: $x + 9 > 0$, odnosno $x > -9$ i $x - 3 > 0$, odnosno $x > 3$ što je za $x = 15$ istinito.

c) $\log 8x + \log(2x+3) = 2\log(1-4x)$

Kao i ranije, zapišimo lijevu i desnu stranu jednadžbe pod jednim logaritmom primjenom pravila za računanje logaritmima:

$$\log(8x \cdot (2x+3)) = \log(1-4x)^2 .$$

Sada je:

$$8x \cdot (2x+3) = (1-4x)^2 .$$

Slijedi:

$$16x^2 + 24x = 1 - 8x + 16x^2$$

pa je

$$x = \frac{1}{32} .$$

Ispitajmo početne uvjete: $2x+3>0$, odnosno $x > -\frac{3}{2}$ i $1-4x>0$, odnosno $x < \frac{1}{4}$ što je za $x = \frac{1}{32}$ istinito.

d) $\log_3(x+5) = 3 - \log_3(x-1)$

I ovdje zapišimo lijevu i desnu stranu jednadžbe pod jednim logaritmom. Najprije je

$$\log_3(x+5) = \log_3 27 - \log_3(x-1)$$

i dalje

$$\log_3(x+5) = \log_3 \frac{27}{x-1} .$$

Sada je:

$$x+5 = \frac{27}{x-1} ,$$

odnosno

$$(x+5)(x-1) = 27 .$$

Slijedi:

$$x^2 + 4x - 32 = 0 .$$

Dobivena jednadžba je kvadratna jednadžba čija su rješenja:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 12}{2} ,$$

odnosno $x_1 = 4$ i $x_2 = -8$.

Ispitajmo početne uvjete: $x+5>0$, odnosno $x > -5$ i $x-1>0$, odnosno $x>1$ što je ispunjeno samo za $x_1 = 4$ pa je rješenje polazne jednadžbe $x = 4$.

5.8. LOGARITAMSKE NEJEDNADŽBE

Ovdje se sjetimo svojstva logaritamske funkcije koje govori o njezinom rastu ili padu – logaritamska funkcija $f(x) = \log_b x$ za:

a) $b>1$ raste, tj. za $x_1 < x_2$ vrijedi $\log_b x_1 < \log_b x_2$,

b) $0<b<1$ pada, tj. za $x_1 < x_2$ vrijedi $\log_b x_1 > \log_b x_2$.

Iz navedenog svojstva slijedi pravilo:

Ako logaritamsku nejednadžbu možemo svesti na oblik

$$\log f(x) < \log g(x) \ (\log f(x) > \log g(x)),$$

onda za:

a) $b > 1$ vrijedi $f(x) < g(x)$ ($f(x) > g(x)$) ,

b) $0 < b < 1$ vrijedi $f(x) > g(x)$ ($f(x) < g(x)$),

pri čemu je $b > 0$, $b \neq 1$, $f(x) > 0$ i $g(x) > 0$.

pravilo za rješavanje logaritamskih nejednadžbi

Primjer 1. Riješimo logaritamske nejednadžbe:

a) $\log_{\frac{1}{2}}(x-4) < \log_{\frac{1}{2}}(5-2x)$

Prema istaknutom pravilu imamo

$$x - 4 > 5 - 2x,$$

odnosno

$$x > 3.$$

Ovdje su početni uvjeti: $x - 4 > 0$, odnosno $x > 4$ i $5 - 2x > 0$, odnosno $x < \frac{5}{2}$. Sva tri uvjeta moraju biti ispunjena. Zato tražimo njihov presjek. Njihov presjek je prazan skup pa ova nejednadžba nema rješenja.

b) $\log x + \log(x+4) \geq 2\log(2-x)$

Primjenom pravila za računanje logaritmima zapišimo lijevu i desnu stranu nejednadžbe pod jednim logaritmom:

$$\log(x \cdot (x+4)) \geq \log(2-x)^2,$$

Sada je:

$$x(x+4) \geq (2-x)^2.$$

Slijedi:

$$x^2 + 4x \geq 4 - 4x + x^2$$

pa je

$$x \geq \frac{1}{2}.$$

Ispitajmo početne uvjete: $x > 0$, zatim $x + 4 > 0$, odnosno $x > -4$ i $2 - x > 0$, odnosno $x < 2$. Presjek svih dobivenih uvjeta je rješenje polazne nejednadžbe: $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right)$.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Izračunajte:

a) $\log_4 64 + \log_2 \frac{1}{32} + \log_3 \sqrt{27} + \log_{\frac{1}{5}} 25 =$

b) $\log_3 81 \cdot \log_3 \frac{1}{27} \cdot \log_2 16 \cdot \log_2 \frac{1}{8} =$

c) $2\log_3 \sqrt{3} + 3\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{2} =$

d) $2^{3+\log_2 7} =$

e) $\log_{11} 33 - \log_{11} 3 =$

f) $\dfrac{\log_5 225}{1+\log_5 3} =$

g) $\dfrac{2\log 2 + \log 7}{1+\log 2.8} =$

h) $\log_9 25 \cdot \log_5 3 =$

2. Logaritam napišite kao zbroj ili razliku logaritama pomnoženih koeficijentom:

a) $\log \dfrac{100a^5b^3c^{-2}}{d^8} =$

b) $\log_2 \left(128\sqrt[5]{a^4b}\right) =$

c) $\log_4 \dfrac{16x^3y^2}{a^5 \cdot \sqrt[4]{b^3}} =$

3. Izraz zapišite kao jedan logaritam:

a) $\log_2 5 + 4\log_2 x^4 - 2\log_2 x^2y^3 =$

b) $3\log_4 x^2 - 54\log_4 x^{-3} + 2\log_4 x - 1 =$

c) $2 + \dfrac{1}{3}\log_3 a - \dfrac{5}{4}\log_3 b =$

4. Riješite jednadžbe:

a) $2^{x+2} = \sqrt{0.5}$,

b) $0.25 \cdot \sqrt[3]{4^{2x-1}} = 8^{-\frac{2}{3}}$,

c) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\dfrac{27}{8}\right)^{x-1} = \dfrac{2}{3}$,

d) $2^{1-x^2} \cdot 2^{2x} = 64^{-1}$,

e) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{1-x} \cdot 5^{-\frac{4}{x}} = 25$,

f) $3 \cdot 2^x - 2^{x-1} = 20$,

g) $9^{x+3} - 3^{x-2} + 2 = 0$,

h) $\log(x+3) - \log(x-2) = 2 - \log 20$,

i) $\log_2(x+2) = 6 - \log_2(x+14)$,

j) $\log_3(2x) = \log_3\left(24 - x^2\right)$,

k) $2\log x - \log(x-1) = \log(x+2)$,

l) $\log(3x-2) + \log(4x-7) = 2\log 13$,

m) $\log_{81} x + \log_9 x + \log_3 x = 7$.

5. Riješite nejednadžbe:

a) $0.2 \cdot \sqrt[3]{25^{x-2}} \le 125^{-\frac{2}{3}}$,

b) $2^{2x-5} \ge \dfrac{1}{16} \cdot 4^{x-1}$,

c) $\log x + \log(x+4) \ge \log(2-x)$,

d) $\log(x-2)+\log(x+2)>2\log(x-1)$.

6. Nacrtajte graf eksponencijalnih funkcija:
   a) $y=3^x$,
   b) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.
7. Nacrtajte graf logaritamskih funkcija:
   a) $f(x)=\log_5 x$,
   b) $f(x)=\log_{\frac{1}{5}} x$.

6. GEOMETRIJA PROSTORA

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:
1. *Kako opisujemo geometrijska tijela i koje su glavne podjele?*
2. *Kako računamo oplošje i volumen geometrijskih tijela?*
3. *Kako naučeno primijeniti u situacijama iz realnog svijeta?*

6.1. GEOMETRIJSKA TIJELA

geometrijska tijela

Geometrijska tijela su dijelovi prostora.

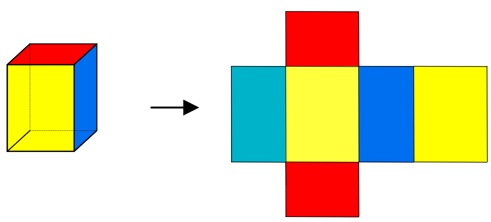
Vezano za geometrijska tijela uvest ćemo neke nove pojmove:

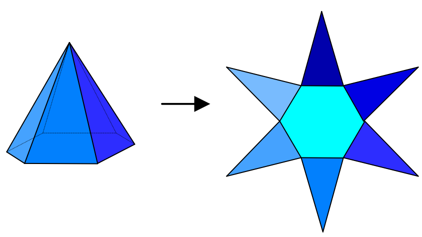
volumen

oplošje

mreža

- **volumen** geometrijskog tijela – govori nam koliki dio prostora zauzima tijela,
- **oplošje** geometrijskog tijela – govori nam koliki je zbroj površina likova koji omeđuju tijelo,
- **vrhovi**, **bridovi**, **strane** geometrijskog tijela,
- **plošne** i **prostorne dijagonale**,
- **mrežu** geometrijskog tijela – lik koji dobijemo kada sve strane geometrijskog tijela razvučemo u ravninu:





podjele geometrijskih tijela

U literaturi nalazimo dvije **podjele** geometrijskih tijela:

1. uglata (prizme i piramide) i obla (valjak, stožac, kugla) geometrijska tijela

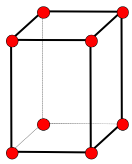
uglata geometrijska tijela

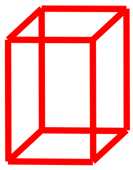
strane

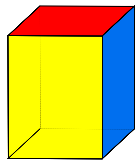
bridovi

vrhovi

Uglata geometrijska tijela ili **poliedri** su geometrijska tijela koja je omeđena dijelovima ravnine. Mnogokuti, kao dijelovi ravnine, koji omeđuju poliedar nazivamo **stranama** poliedra. Susjedne strane poliedra spajaju se u **bridovima** poliedra. Točke poliedra u kojima se spajaju tri ili više bridova poliedra nazivamo **vrhovima** poliedra.


VRHOVI

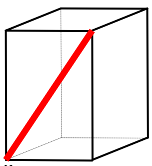

BRIDOVI

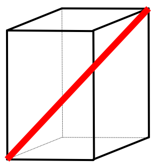

STRANE

plošna dijagonala

prostorna dijagonala

Dijagonale strana poliedra nazivamo **plošnim dijagonalama**. Dužine koje spajaju dva vrha poliedra i koje ne leže na jednoj strani poliedra nazivamo **prostornim dijagonalama** poliedra.


PLOŠNA DIJAGONALA


PROSTORNA DIJAGONALA

obla geometrijska tijela

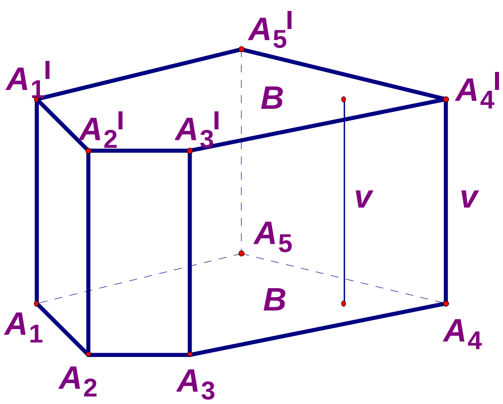
Obla geometrijska tijela omeđena su dijelovima ravnina i zaobljenom plohom (valjak, stožac) ili samo zaobljenom plohom (kugla).

2. cilindri (prizme i valjak), konusi (piramide i stožac) i kugla

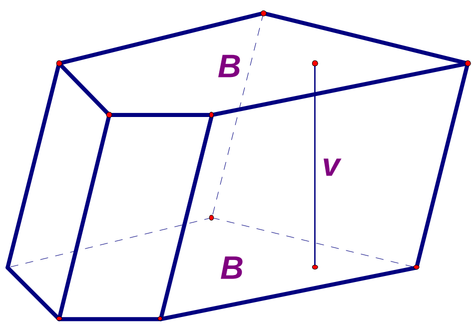
cilindar

Cilindar je geometrijsko tijelo koje nastaje paralelnim pomakom proizvoljne baze, površine B, do visine v.
Cilindar čija je baza mnogokut naziva se **prizma**.
Cilindar čija je baza krug naziva se **valjak**.

Ako cilindar nastaje paralelnim pomakom u smjeru okomitom na bazu, kažemo da je cilindar **uspravan**. U suprotnom, govorimo o **kosom** cilindru. U nastavku govorimo samo o uspravnim cilindrima.



USPRAVNA PRIZMA



KOSA PRIZMA

Konus je geometrijsko tijelo koje se sastoji od svih dužina koje povezuju točke njegove proizvoljne baze, površine B, s njegovim vrhom V koji je na udaljenosti v od ravnine baze. *konus*

Konus čija je baza mnogokut naziva se **piramida**.
Konus čija je baza krug naziva se **stožac**.

Razlikujemo **uspravni** i **kosi konus**. Mi ćemo razmatrati samo uspravne konuse.

6.2. PRIZME

U prethodnom odjeljku definirali smo prizmu kao cilindar kojemu je baza mnogokut.

Možemo reći i: **prizma** je poliedar čije su dvije strane paralelni i sukladni mnogokuti, a ostale strane su paralelogrami (kod uspravnih prizmi preostale strane su pravokutnici). *prizma*

Sukladni mnogokuti koji leže u paralelnim ravninama nazivaju se **baze**, a ostale strane **pobočke**. Sve pobočke zajedno čine **pobočje prizme**. *baze prizme* *pobočka* *pobočje*

Bridovi koji pripadaju bazama prizme nazivaju se **osnovni bridovi**. *osnovni brid*
Bridovi u kojima se spajaju po dvije pobočke nazivaju se **bočni bridovi** (**pobočni bridovi**). Kažemo i da su pobočni bridovi spojnice odgovarajućih vrhova donje i gornje baze. *bočni brid*

Kažemo da je prizma ***n*-terostrana** ako je njezina baza n-terokut. *n-terostrana prizma*

Kažemo da je prizma **uspravna** ako su bočni bridovi okomiti na njezinu bazu. U suprotnom kažemo da je **kosa**. *uspravna prizma* *kosa prizma*

Za uspravnu peterostranu prizme s gornje slike su:

- osnovni bridovi: dužine $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_4A_5}$, $\overline{A_5A_1}$, $\overline{A_1'A_2'}$, $\overline{A_2'A_3'}$, $\overline{A_3'A_4'}$, $\overline{A_4'A_5'}$ i $\overline{A_5'A_1'}$,
- bočni bridovi: dužine $\overline{A_1A_1'}$, $\overline{A_2A_2'}$, $\overline{A_3A_3'}$, $\overline{A_4A_4'}$ i $\overline{A_5A_5'}$,
- pobočke: pravokutnici $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$, $A_3A_4A_4'A_3'$, $A_4A_5A_5'A_4'$ i $A_1A_5A_5'A_1'$.

Kažemo da je prizma **pravilna** ako je uspravna i ako je njezina baza pravilan mnogokut. *pravilna prizma*

Visina prizme je udaljenost ravnina u kojima leže baze prizme. *visina prizme*

Objasnili smo pojam oplošja i volumena geometrijskog tijela.

Označimo li s B površinu baze prizme, s P površinu pobočja, a s v duljinu visine prizme, tada **oplošje prizme** računamo po formuli: *oplošje prizme*

$$O = 2B + P\,,$$

a **volumen prizme** po formuli:

volumen prizme

$$V = B \cdot v\,.$$

Navedene formule vrijede za svaku prizmu pa će nam one u zadacima u kojima računamo oplošje i volumen biti polazne (nije nužno pamtiti sređene formule do kojih ćemo dolaziti ako znamo polazne i čime je omeđeno tijelo koje promatramo).

Primjer 1. Izračunajmo volumen prizme ako je njezina baza romb kojemu su dijagonale duljine 16 cm i 10 cm i duljina visine prizme 20 cm.

Budući da su zadane duljine dijagonala romba $e = 16$ cm i $f = 10$ cm, možemo najprije izračunati površinu baze prizme:

$$B = \frac{e \cdot f}{2} = \frac{16 \cdot 10}{2} = 80 \text{ cm}^2.$$

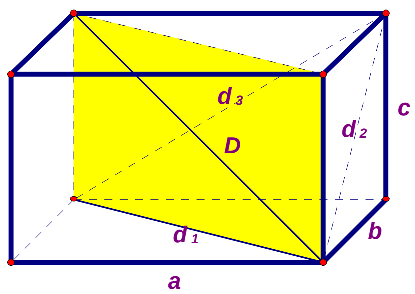
Sada je:

$$V = B \cdot v = 80 \cdot 20 = 1600 \text{ cm}^3.$$

6.2.1. KVADAR

Kvadar je uspravna prizma kojoj je baza pravokutnik.

kvadar



Označimo: a, b i c duljine bridova kvadra, d_1, d_2, d_3 duljine njegovih plošnih dijagonala i D duljina prostorne dijagonale.

Tada je:

$d_1^2 = a^2 + b^2$ pa je

$D^2 = d_1^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$,

odnosno $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Baza kvadra je pravokutnik površine $B = a \cdot b$, a duljina visine jednaka je duljini bočnog brida c. Zato je volumen kvadra:

$$V = a \cdot b \cdot c\,,$$

volumen kvadra

a oplošje kvadra:

$$O = 2B + P = 2ab + 2ac + 2bc\,,$$

odnosno:

$$O = 2(ab + ac + bc).$$

oplošje kvadra

Primjer 1. Bazen ima oblik kvadra duljine 5 m, širine 3.5 m i visine 1.8 m. Koliko litara vode ima u bazenu ako je napunjen do $\frac{2}{3}$ svoje visine?

Zadano je $a = 5$ m, $b = 3.5$ m i $c = 1.8$ m. Volumen bazena je:

$$V = abc = 5 \cdot 3.5 \cdot 1.8 = 31.5 \text{ m}^3.$$

Budući da je bazen napunjen do $\frac{2}{3}$ svoje visine slijedi da u bazenu ima:

$\frac{2}{3} \cdot 31.5 = 21$ m³ vode. Izrazimo dobiveni volumen u litrama:

21 m³ $= 21000$ dm³ $= 21000$ litara vode.

Primjer 2. Izračunaj oplošje kvadra ako su duljine njegovih osnovnih bridova 3 cm i 4 cm, a duljina njegove prostorne dijagonale $\sqrt{29}$ cm.

Zadano je $a = 3$ cm, $b = 4$ cm i $D = \sqrt{29}$ cm.

Iz $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ slijedi:

$$\sqrt{3^2 + 4^2 + c^2} = \sqrt{29},$$

odnosno:

$$9 + 16 + c^2 = 29$$

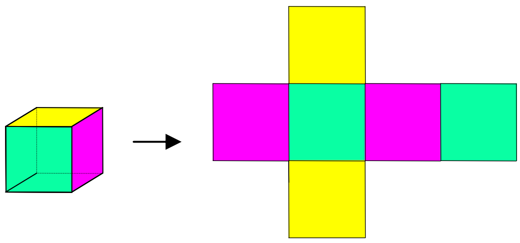
pa je $c = 2$ (uzimamo pozitivno rješenje jer je riječ o duljini brida).
Sada je:

$$O = 2(ab + ac + bc) = 2(3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2) = 52 \text{ cm}^2.$$

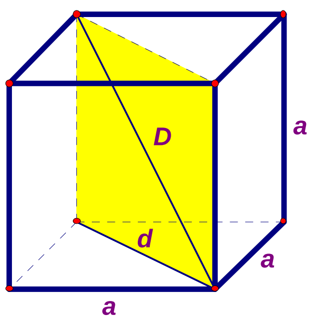
6.2.2. KOCKA

Kocka je kvadar kojemu su bridovi jednake duljine. *kocka*

Slijedi, kocka je geometrijsko tijelo omeđeno sa šest kvadrata:



KOCKA I NJEZINA MREŽA



Označimo: a duljina brida kocke, d duljina plošne dijagonale, D duljina prostorne dijagonale.

Budući da je kocka kvadar za koji vrijedi $a = b = c$, uvrštavanjem u ranije izvedene formule za kvadar dobivamo:

$$d = a\sqrt{2} \text{ i}$$

$$D = a\sqrt{3}.$$

Volumen kocke je:

$$V = a^3,$$

volumen kocke

a njezino oplošje:

$$O = 6a^2.$$

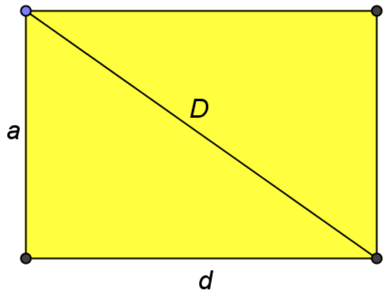
oplošje kocke

Primjer 1. Izračunajmo oplošje i volumen kocke kojoj je površina dijagonalnog presjeka $225\sqrt{2}$ cm².

Dijagonalni presjek prizme je presjek koji prolazi dijagonalama baze i sadrži prostornu dijagonalu prizme.

dijagonalni presjek prizme

Na gornjoj skici kocke, istaknut je (žuto osjenčan) dijagonalni presjek kocke. Skicirajmo ga zasebno:



Sa skice vidimo da je površina dijagonalnog presjeka:

$$P_d = a \cdot d = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}\,,$$

pa je:

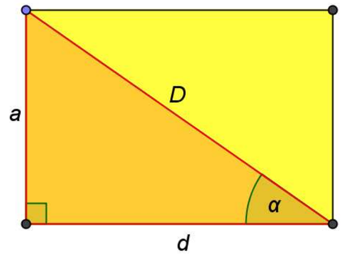
$$a^2\sqrt{2} = 225\sqrt{2}\,,$$

iz čega dobivamo: $a = 15$ cm.

Sada je volumen kocke $V = a^3 = 15^3 = 3375$ cm³, a njezino oplošje $O = 6a^2 = 6 \cdot 15^2 = 1350$ cm².

Primjer 2. Odredimo mjeru kuta koji prostorna dijagonala kocke zatvara s ravninom baze.

Prema definiciji kuta između pravca i ravnine, kut između prostorne dijagonale i ravnine baze je kut između prostorne dijagonale i dijagonale baze. Dopunimo zato skicu dijagonalnog presjeka:



Uočimo pravokutan trokut iz kojeg po definiciji funkcije sinus vrijedi:

$$\sin\alpha = \frac{a}{D} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.57735\,,$$

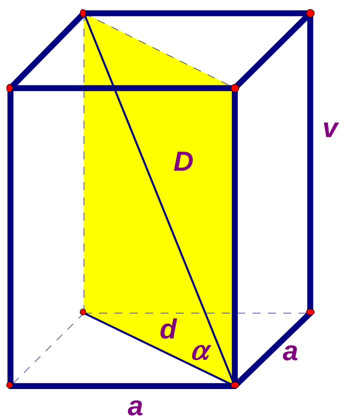
iz čega dobivamo:

$$\alpha = 35°15'51''.$$

6.2.3. PRAVILNA ČETVEROSTRANA PRIZMA

Pravilna četverostrana prizma (kvadratna prizma) je uspravna prizma kojoj je baza kvadrat.

pravilna četverostra-na prizma



Označimo:

a … duljina osnovnog brida,
v … duljina visine (duljina bočnog brida),
d … duljina dijagonale baze,
D … duljina prostorne dijagonale,
α … mjera kuta između prostorne dijagonale i ravnine baze.

Budući da je baza kvadrat vrijedi: $B = a^2$.
Pobočje čine četiri pravokutnika stranica duljine a i v pa je

$$P = 4av.$$

Sada je volumen pravilne četverostrane prizme:

$$V = B \cdot v = a^2 \cdot v,$$

a njezino oplošje:

$$O = 2B + P = 2a^2 + 4av.$$

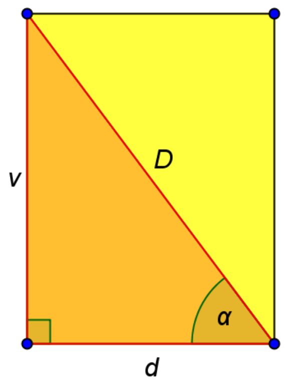
volumen i oplošje pravilne četverostrane prizme

Dijagonalni presjek je pravokutnik stranica duljine d i v pa je njegova površina:

$$P_d = d \cdot v.$$

Primjer 1. Izračunaj oplošje i volumen pravilne četverostrane prizme ako je duljina dijagonale baze $7\sqrt{2}$ cm, a mjera kuta koji prostorna dijagonala zatvara s ravninom baze $68°$.

Skicirajmo dijagonalni presjek zadane prizme:



Zadano je $d = 7\sqrt{2}$ i $\alpha = 68°$.
Iz $d = a\sqrt{2}$, odnosno $a\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$ slijedi $a = 7$ cm.
Dalje, iz osjenčanog pravokutnog trokuta imamo:

$$tg\alpha = \frac{v}{d},$$

odnosno

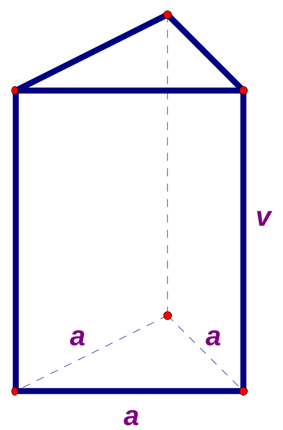
$$v = d \cdot tg\alpha = 7\sqrt{2} \cdot tg68° = 24.5 \text{ cm}.$$

Sada je volumen $V = a^2 \cdot v = 7^2 \cdot 24.5 = 1176$ cm³,
i oplošje $O = 2a^2 + 4av = 2 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 \cdot 24.5 = 784$ cm².

6.2.4. PRAVILNA TROSTRANA PRIZMA

Pravilna trostrana prizma je uspravna prizma kojoj je baza jednakostraničan trokut.

pravilna trostrana prizma



Označimo:

a … duljina osnovnog brida,
v … duljina visine (duljina bočnog brida),

Budući da je baza jednakostraničan trokut vrijedi:

$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Pobočje čine tri pravokutnika stranica duljine a i v pa je

$$P = 3av.$$

Sada je volumen pravilne trostrane prizme:

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot v,$$

volumen pravilne trostrane prizme

a njezino oplošje:

$$O = 2B + P = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3av,$$

odnosno

$$O = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3av.$$

oplošje pravilne trostrane prizme

Primjer 1. Oplošje pravilne trostrane prizme iznosi $104\sqrt{3}$ cm², a duljina osnovnog brida je 8 cm. Izračunaj volumen prizme.

Zadano je $O = 104\sqrt{3}$ cm² i $a = 8$ cm. Uvrstimo li zadane podatke u formulu za oplošje dobivamo:

$$\frac{8^2\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot 8v = 104\sqrt{3},$$

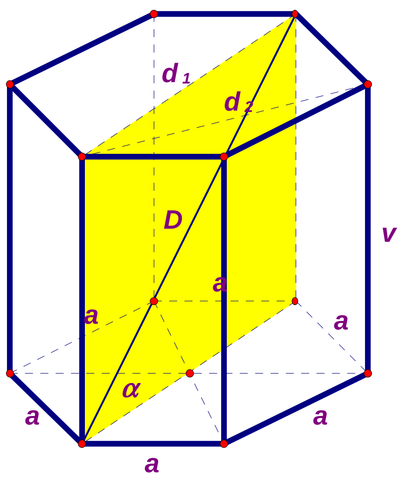
iz čega dobivamo $v = 3\sqrt{3}$ cm. Sada je traženi volumen:

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot v = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3\sqrt{3} = 144 \text{ cm}^3.$$

6.2.5. PRAVILNA ŠESTEROSTRANA PRIZMA

Pravilna šesterostrana prizma je uspravna prizma kojoj je baza pravilan šesterokut.

pravilna šesterostrana prizma



Označimo:

a … duljina osnovnog brida,
v … duljina visine (duljina bočnog brida),
d_1 … duljina dulje dijagonale baze,
d_2 … duljina kraće dijagonale baze
D … duljina prostorne dijagonale,
α … mjera kuta između prostorne dijagonale i ravnine baze.

Budući da je baza pravilan šesterokut koji sa sastoji od šest jednakostraničnih trokuta stranice duljine a imamo:

$$B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Pobočje čine šest pravokutnika stranica duljine a i v pa je

$$P = 6av.$$

Sada je volumen pravilne šesterostrane prizme:

$$V = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot v,$$

volumen pravilne šesterostrane prizme

a njezino oplošje:

$$O = 2B + P = 2 \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6av,$$

odnosno

$$O = 3\sqrt{3}a^2 + 6av.$$

oplošje pravilne šesterostrane prizme

Uočimo da je $d_1 = 2a$ i $d_2 = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Veći dijagonalni presjek je pravokutnik stranica duljine d_1 i v pa je njegova površina:

$$P_{d_1} = d_1 \cdot v.$$

Manji dijagonalni presjek je pravokutnik stranica duljine d_2 i v pa je njegova površina:

$$P_{d_2} = d_2 \cdot v.$$

Primjer 1. Izračunajmo oplošje i volumen pravilne šesterostrane prizme kojoj je površina većeg dijagonalnog presjeka 150 cm², a duljina visine 15 cm.

Uvrstimo li zadane podatke $P_{d_1} = 150$ cm² i $v = 15$ cm u formulu za površinu većeg dijagonalnog presjeka dobivamo:

$$d_1 \cdot 15 = 150$$

pa je $d_1 = 10$ cm, odnosno $a = 5$ cm.

Sada je volumen:

$$V = 3\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\cdot v = 3\cdot\frac{5^2\sqrt{3}}{2} = 37.5\sqrt{3} = 64.95\,\text{cm}^3$$

i oplošje:

$$O = 3\sqrt{3}a^2 + 6av = 3\sqrt{3}\cdot 5^2 + 6\cdot 5\cdot 15 = 75\sqrt{3} + 450 = 579.9\,\text{cm}^2.$$

6.3. PIRAMIDE

U odjeljku 6.1. definirali smo piramidu kao konus kojemu je baza mnogokut.

Možemo reći i: **piramida** je poliedar čija je jedna strana mnogokut $A_1A_2A_3A_4A_5\ldots A_n$, a ostale strane su trokuti sa zajedničkim vrhom V: A_1A_2V, A_2A_3V, A_3A_4V, A_4A_5V … A_nA_1V.

piramida

Mnogokut se naziva **baza piramide**, a trokuti **pobočke** piramide. Sve pobočke zajedno čine **pobočje**.

baza piramide

pobočka

pobočje

Bridovi koji pripadaju bazi piramide nazivaju se **osnovni bridovi**.
Bridovi koji spajaju vrh piramide s vrhovima baze nazivaju se **bočni bridovi** (**pobočni bridovi**).

osnovni brid

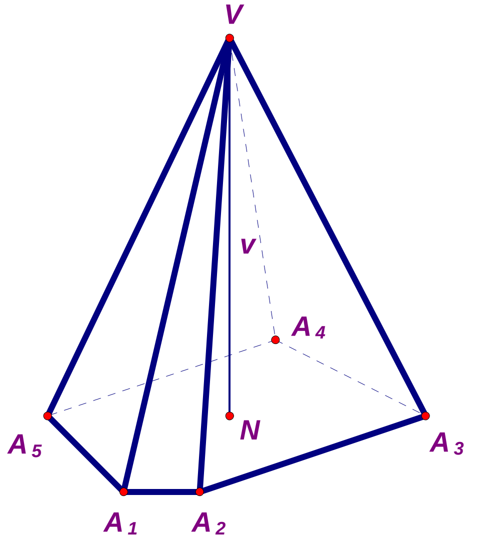
bočni brid

Kažemo da je piramida ***n*-terostrana** ako je njezina baza n-terokut.

n-terostrana piramida

Kažemo da je piramida **uspravna** ako su njezini bočni bridovi jednakih duljina. (Ova definicija dovodi do nekih nelogičnosti, ali je ovdje prihvaćamo kao zadovoljavajuću). U suprotnom kažemo da je **kosa**.

Na slici je prikazana peterostrana piramida:



– osnovni bridovi: dužine $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$ i $\overline{A_4A_5}$,
– bočni bridovi: dužine $\overline{A_1V}$, $\overline{A_2V}$, $\overline{A_3V}$, $\overline{A_4V}$ i $\overline{A_5V}$,
– pobočke: trokuti A_1A_2V, A_2A_3V, A_3A_4V, A_4A_5V i A_5A_1V.

Visina piramide je udaljenost vrha piramida od ravnine baze, tj. udaljenost vrha piramide od njegove ortogonalne projekcije na ravninu baze, točke N koju nazivamo **nožište** visine.

visina piramide

nožište visine

Kažemo da je piramida **pravilna** ako je uspravna i ako je njezina baza pravilan mnogokut. Pobočke pravilne piramide su sukladni jednakokračni trokuti, a nožište visine nalazi se u središtu bazi opisane kružnice.

pravilna piramida

Označimo li s B površinu baze piramide, s P površinu pobočja, a s v duljinu visine prizme, tada **oplošje piramide** računamo po formuli:

$$O = B + P\ ,$$

oplošje piramide

a **volumen piramide** po formuli:

$$V = \frac{B \cdot v}{3}\ .$$

volumen piramide

Navedene formule vrijede za svaku piramidu pa će nam one u zadacima u kojima računamo oplošje i volumen piramide biti polazne.

Primjer 1. Izračunajmo volumen piramide ako je njezina baza pravokutan trokut kojemu su katete duljine 12 cm i 5 cm i duljina njezine visine 7 cm.

Baza piramide je pravokutan trokut kateta duljine $a = 10$ cm i $b = 5$ cm, odnosno površine:

$$B = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30 \text{ cm}^2.$$

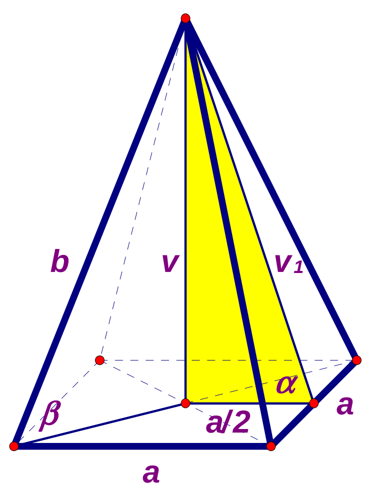
Sada je:

$$V = \frac{B \cdot v}{3} = \frac{30 \cdot 70}{3} = 70 \text{ cm}^3.$$

6.3.1. PRAVILNA ČETVEROSTRANA PIRAMIDA

Pravilna četverostrana piramida je uspravna piramida kojoj je baza kvadrat.

pravilna četverostrana piramida



Označimo:

a ... duljina osnovnog brida
b ... duljina bočnog brida
v ... duljina visine piramide
v_1 ... duljina visine pobočke
α ... kut između pobočke i ravnine baze
β ... kut između bočnog brida i ravnine baze

Budući da je baza kvadrat vrijedi:

$$B = a^2.$$

Pobočje čine četiri jednakokračna trokuta osnovice duljine a i visine duljine v_1 pa je

$$P = 4 \cdot \frac{av_1}{2} = 2av_1.$$

Sada je volumen pravilne četverostrane piramide:

$$V = \frac{B \cdot v}{3} = \frac{a^2 \cdot v}{3},$$

a njezino oplošje:

$$O = B + P = a^2 + 2av_1.$$

volumen i oplošje pravilne četverostrane piramide

Dijagonalni presjek piramide je presjek piramide ravninom koja prolazi kroz dva bočna brida piramide i sadrži jednu dijagonalu baze piramide.

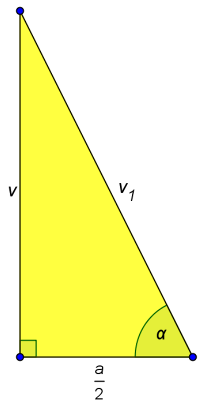
dijagonalni presjek piramide

Dijagonalni presjek pravilne četverostrane piramide je jednakokračan trokut osnovice duljine d, gdje je d duljina dijagonale baze i visine duljine v pa je njegova površina:

$$P_d = \frac{d \cdot v}{2}.$$

Primjer 1. Izračunajmo volumen i oplošje pravilne četverostrane piramide ako je duljina njezine visine 14 cm i mjera kuta između pobočke i ravnine baze $71°$.

Zadano je $a = 14$ cm i $\alpha = 71°$. Uočimo pravokutan trokut u kojem nam se pojavljuju zadani kut i iscrtajmo ga:



Po definiciji funkcije tangens dobivamo:

$$tg\alpha = \frac{v}{\frac{a}{2}}$$

iz čega je:

$$v = \frac{a}{2} \cdot tg\alpha = \frac{14}{2} \cdot tg71° = 20.33 \text{ cm}.$$

Slično, po definiciji funkcije sinus dobivamo:

$$\sin\alpha = \frac{v}{v_1}$$

pa je

$$v_1 = \frac{v}{\sin\alpha} = \frac{20.33}{\sin 71°} = 21.5 \text{ cm}.$$

Sada je volumen:

$$V = \frac{a^2 \cdot v}{3} = \frac{14^2 \cdot 20.33}{3} = 1328.23 \text{ cm}^3$$

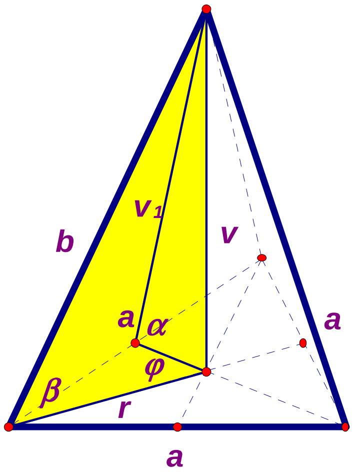
i oplošje:

$$O = a^2 + 2av_1 = 14^2 + 2 \cdot 14 \cdot 21.5 = 798 \text{ cm}^2.$$

6.3.2. PRAVILNA TROSTRANA PIRAMIDA

Pravilna trostrana piramida je uspravna piramida kojoj je baza jednakostraničan trokut.

pravilna trostrana piramida



Označimo:

a ... duljina osnovnog brida
b ... duljina bočnog brida
v ... duljina visine piramide
v_1 ... duljina visine pobočke
α ... kut između pobočke i ravnine baze
β ... kut između bočnog brida i ravnine baze

$r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ … duljina polumjera bazi opisane kružnice

$\rho = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ … duljina polumjera bazi upisane kružnice

Budući da je baza jednakostraničan trokut vrijedi:

$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Pobočje čine tri jednakokračna trokuta osnovice duljine a i visine duljine v_1 pa je

$$P = 3 \cdot \frac{av_1}{2}.$$

Sada je volumen pravilne trostrane piramide:

$$V = \frac{B \cdot v}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot v,$$

a njezino oplošje:

$$O = B + P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{a \cdot v_1}{2}.$$

volumen pravilne trostrane piramide

oplošje pravilne trostrane piramide

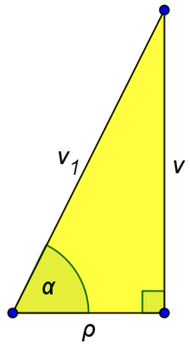
Primjer 1. Izračunaj oplošje pravilne trostrane piramide ako je njezin volumen $180\sqrt{3}$ cm³, a duljina osnovnog brida 12 cm.

Zadano je $V = 180\sqrt{3}$ cm³ i $a = 12$ cm. Iz formule za volumen najprije računamo duljinu visine:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{12^2\sqrt{3}}{4} \cdot v = 180\sqrt{3},$$

iz čega dobivamo $v = 15$ cm.

Uočimo i iscrtajmo pravokutan trokut koji povezuje duljinu osnovnog brida a, duljinu visine piramide v i duljinu visine pobočke v_1:



Primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$v_1^2 = \rho^2 + v^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{12\sqrt{3}}{6}\right)^2 + 15^2 = 237,$$

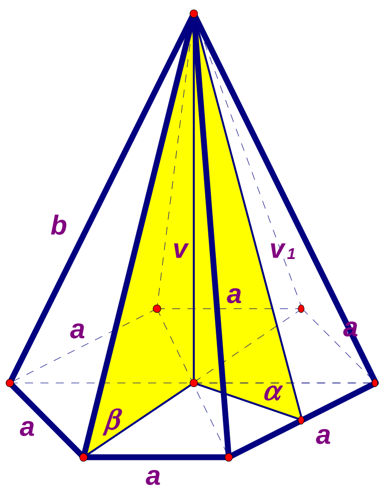
iz čega je $v_1 = 15.39$ cm.

Sada je: $O = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{a \cdot v_1}{2} = \frac{15^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{15 \cdot 15.39}{2} = 559.13$ cm².

6.3.3. PRAVILNA ŠESTEROSTRANA PIRAMIDA

Pravilna šesterostrana piramida je uspravna prizma kojoj je baza pravilan šesterokut.

pravilna šesterostrana piramida



Označimo:

a ... duljina osnovnog brida
b ... duljina bočnog brida
v ... duljina visine piramide
v_1 ... duljina visine pobočke
α ... kut između pobočke i ravnine baze
β ... kut između bočnog brida i ravnine baze

Budući da je baza pravilan šesterokut koji sa sastoji od šest jednakostraničnih trokuta stranice duljine a imamo:

$$B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Pobočje čine šest jednakokračna trokuta osnovice duljine a i visine duljine v_1 pa je:

$$P = 6 \cdot \frac{av_1}{2} = 3av_1.$$

Sada je volumen pravilne trostrane piramide:

$$V = \frac{B \cdot v}{3} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot v,$$

odnosno

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot v,$$

volumen pravilne šesterostrane piramide

a njezino oplošje:

$$O = B + P = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3av_1.$$

oplošje pravilne šesterostrane piramide

Neka su d_1 i d_2 duljine dulje i kraće dijagonale baze (pogledajte kod pravilne šesterostrane prizme). Tada je $d_1 = 2a$ i $d_2 = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Veći dijagonalni presjek je jednakokračan trokut osnovice duljine d_1 i visine v pa je njegova površina:

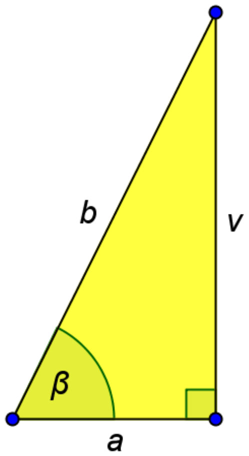
$$P_{d_1} = \frac{d_1 \cdot v}{2}.$$

Manji dijagonalni presjek je jednakokračan trokut osnovice duljine d_2 i visine v pa je njegova površina:

$$P_{d_2} = \frac{d_2 \cdot v}{2}.$$

Primjer 1. Izračunaj volumen i oplošje pravilne šesterostrane piramide kojoj je duljina osnovnog brida 8 cm i duljina bočnog brida 17 cm. Kolika je mjera kuta između bočnog brida i ravnine baze?

Budući da su dani podaci $a = 8$ cm i $b = 17$ cm, uočimo i iscrtajmo pravokutan trokut koji ih povezuje:



Primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$v^2 = b^2 - a^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225,$$

iz čega je $v = 15$ cm.

Sada je:

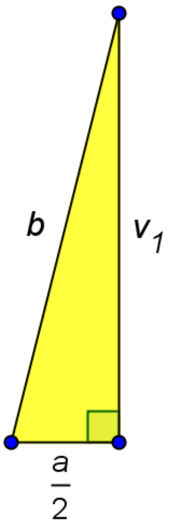
$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot v = \frac{8^2\sqrt{3}}{2} \cdot 15 = 480\sqrt{3} = 831.38 \text{ cm}^3.$$

Mjeru traženog kuta možemo izračunati iz istog trokuta po npr. definiciji funkcije kosinus:

$$\cos\beta = \frac{a}{b} = \frac{8}{17} = 0.47059$$

pa je $\beta = 61°55'39''$.

Da bi izračunali oplošje piramide, moramo najprije izračunati duljinu visine pobočke v_1. Uočimo pravokutan trokut koji povezuje podatke a, b i v_1 (polovica pobočke):



Primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$v_1^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 17^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 289 - 16 = 273,$$

iz čega je $v_1 = 16.52$ cm.

Sada je:

$$O = 3 \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot 8 \cdot 16.52 = 96\sqrt{3} + 396.48 = 562.76 \text{ cm}^2.$$

6.4. VALJAK

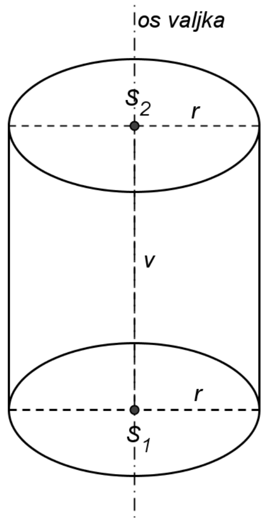
U odjeljku 6.1. definirali smo valjak kao cilindar kojemu je baza krug.

Valjak je geometrijsko tijelo omeđeno dvama sukladnim krugovima koji leže u paralelnim ravninama i koje se nazivaju **baze valjka** i dijelom zakrivljene plohe koju se naziva **plašt valjka**.

valjak

baze valjka

plašt valjka



Označimo:

r ... duljina polumjera baza valjka
v ... duljina visine valjka
S_1, S_2 … središta baza valjka

Os valjka je pravac koji prolazi središtem baza S_1 i S_2.
Izvodnica valjka je najdulja dužina koja je paralelna s osi valjka i pripada plaštu valjka.

os valjka

izvodnica valjka

Kažemo da je valjak **uspravan** ako mu je os okomita na ravninu baze. U suprotnom, riječ je o **kosom** valjku.

Visina valjka je udaljenost ravnina u kojima leže baze valjka.

visina valjka

Baza valjka je krug polumjera duljine r i površine:

$$B = r^2\pi .$$

Razvijemo li plašt valjka u ravninu, dobit ćemo pravokutnik kojemu su stranice duljine $o = 2r\pi$ (opseg baze) i v. Njegova je površina:

$$P = 2r\pi v .$$

Budući da je valjak cilindar, njegov volumen računamo po istoj polaznoj formuli kao i volumen prizme:

$$V = B \cdot v = r^2\pi v .$$

volumen valjka

Slično i oplošje valjka:

$$O = 2B + P = 2r^2\pi + 2r\pi v = 2r\pi \cdot (r + v),$$

odnosno

$$O = 2r\pi \cdot (r + v).$$

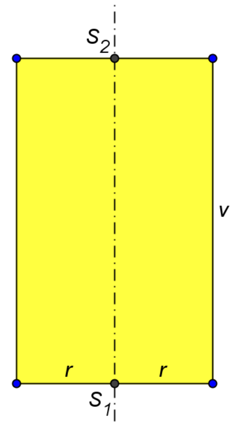
oplošje valjka

Osni presjek valjka je presjek valjka ravninom koja sadrži os valjka.

osni presjek valjka

Primjer 1. Koliko litara vode stane u posudu u obliku uspravnog valjka kojemu je površina baze 64π cm², a površina osnog presjeka 80 cm²?

Zadano je $B = 64\pi$ cm² i $P_{op} = 80$ cm². Iz $B = r^2\pi$, odnosno $r^2\pi = 64\pi$ dobivamo duljinu polumjera baze $r = 8$ cm.
Iscrtajmo osni presjek valjka:



Osni presjek je pravokutnik stranica duljine $2r$ i v pa je njegova površina:

$$P_{op} = 2rv\,.$$

Sada iz $2 \cdot 8 \cdot v = 80$, dobivamo $v = 5$ cm.

Volumen valjka je:

$$V = r^2\pi v = 8^2\pi \cdot 5 = 320\pi = 1005.31\text{ cm}^3.$$

Preračunajmo ga u litre:

$$V = 1.00531\text{ dm}^3 = 1.005\text{ l} \approx 1\text{ l}.$$

6.5. STOŽAC

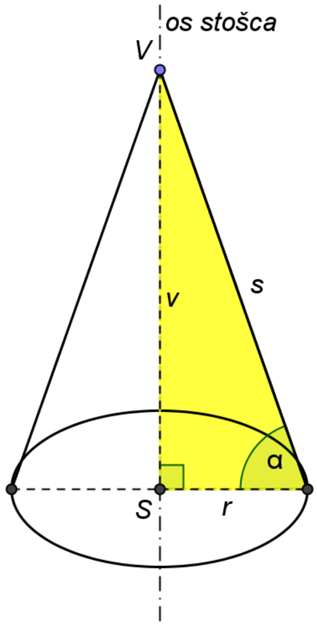
U odjeljku 6.1. definirali smo stožac kao konus kojemu je baza krug.

stožac

baza stošca

plašt stošca

Stožac je geometrijsko tijelo omeđeno krugom, koji se naziva **baza stošca**, i dijelom zakrivljene plohe koja se naziva **plašt stošca**.



Označimo:

r ... duljina polumjera baze stošca
v ... duljina visine stošca
s … duljina izvodnice stošca
α … mjera kuta između izvodnice i ravnine baze
S … središte baze stošca

os stošca

izvodnica stošca

Os stošca je pravac koji prolazi središtem baze S i vrhom V stošca.
Izvodnica stošca je dužina koja spaja vrh stošca s bilo kojom točkom ruba baze (kružnice koja omeđuje bazu).
Kažemo da je stožac **uspravan** ako mu je os okomita na ravninu baze. U suprotnom, riječ je o **kosom** stošcu.

Visina stošca je udaljenost vrha stošca od ravnine njegove baze, tj. udaljenost vrha stošca od njegove ortogonalne projekcije na ravninu baze, točke koju nazivamo **nožište** visine.
Kažemo i da je stožac uspravan ako mu je nožište visine u središtu baze. Izvodnice uspravnog stošca jednake su duljine.

visina stošca

nožište visine

Baza stošca je krug polumjera duljine r i površine:

$$B = r^2\pi .$$

Razvijemo li plašt stošca u ravninu, dobit ćemo kružni isječak polumjera duljine s i kružnog luka duljine $o = 2r\pi$ (opseg baze). Njegova je površina:

$$P = \frac{s \cdot 2r\pi}{2} = r\pi s .$$

Budući da je stožac konus, njegov volumen računamo po istoj polaznoj formuli kao i volumen piramide:

$$V = \frac{B \cdot v}{3} = \frac{r^2\pi \cdot v}{3} .$$

volumen stošca

Slično i oplošje stošca:

$$O = B + P = r^2\pi + r\pi s ,$$

odnosno

$$O = r\pi \cdot (r + s) .$$

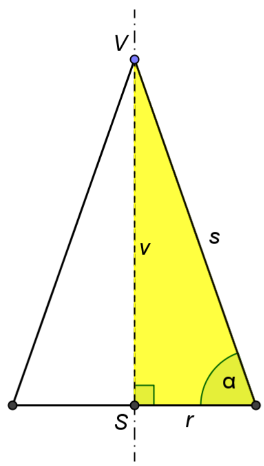
oplošje stošca

Osni presjek stošca je presjek stošca ravninom koja sadrži os stošca.

osni presjek stošca

Primjer 1. Duljina polumjera baze uspravnog stošca je 48 cm, a površina njegovog plašta 3504π cm² . Izračunajmo volumen tog stošca i mjeru kuta između njegove izvodnice i ravnine baze. Kolika je površina njegovog osnog presjeka?

Zadano je $r = 48$ cm i $P = 3504\pi$ cm². Iz $P = r\pi s$, odnosno $48\pi s = 3504\pi$ slijedi $s = 73$ cm.
Iscrtajmo osni presjek stošca:



Primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$v^2 = s^2 - r^2 = 73^2 - 48^2 = 3025 ,$$

pa je:

$$v = 55 \text{ cm.}$$

Sada je volumen:

$$V = \frac{r^2\pi v}{3} = \frac{48^2 \cdot \pi \cdot 55}{3} = 42240\pi = 132700.87 \text{ cm}^3.$$

Iz definicije funkcije kosinus slijedi:

$$\cos\alpha = \frac{r}{s} = \frac{48}{73} = 0.65753 ,$$

pa je $\alpha = 48°53'16''$.

Osni presjek stošca je jednakokračan trokut kojemu je duljina osnovice $2r$ i duljina visine v pa je njegova površina:

$$P_{op} = \frac{2r \cdot v}{2} = rv = 48 \cdot 55 = 2640 \text{ cm}^2.$$

6.6. KUGLA I SFERA

Neka je S čvrsta točka prostora i r pozitivan realan broj.

kugla

Kugla je skup svih točaka prostora čija je udaljenost do točke S jednaka ili manja od r. Točka S je **središte**, a r duljina **polumjera** (radijusa) **kugle**.

središte kugle

polumjer kugle

Sfera je skup svih točaka prostora čija je udaljenost od točke S jednaka r.

sfera

Volumen kugle polumjera r dan je formulom:

volumen kugle

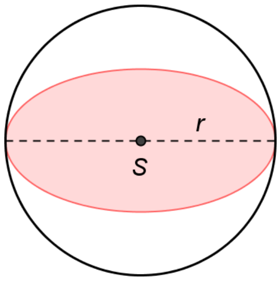
$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi .$$

Oplošje kugle polumjera r (tj. površina sfere polumjera r) dano je formulom:

$$O = 4r^2 \pi .$$

oplošje kugle

Primjer 1. Izračunajmo oplošje kugle ako je njezin volumen $\frac{\pi}{6}$ cm³.



Uvrštavanjem u formulu za volumen kugle dobivamo:

$$\frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{\pi}{6},$$

odnosno

$$r^3 = \frac{1}{8}$$

pa je $r = \frac{1}{2}$ cm.

Sada je

$$O = 4r^2 \pi = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \pi = \pi \text{ cm}^2.$$

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Izračunajte oplošje i volumen kocke kojoj je površina dijagonalnog presjeka $144\sqrt{2}$ cm².
2. Izračunajte volumen kvadra ako su duljine njegovih osnovnih bridova 7 cm i 9 cm, a njegovo oplošje 286 cm².
3. Izračunajte oplošje i volumen pravilne četverostrane prizme ako je duljina dijagonale baze $5\sqrt{2}$ cm, a mjera kuta koji prostorna dijagonala zatvara s ravninom baze 71°17'.
4. Oplošje pravilne trostrane prizme iznosi iznosi $110\sqrt{3}$ cm², a duljina

osnovnog brida je 10 cm. Izračunajte volumen prizme. 5. Volumen pravilne šesterostrane prizme je $270\sqrt{3}$ cm³, a duljina osnovnog brida je 6 cm. Izračunajte oplošje prizme. 6. Dno bazena ima oblik pravilnog šesterokuta. Duljina osnovnog brida je 2 m. Bazen može primiti 100 hl vode. Kolika je duljina visina bazena? 7. Izračunajte volumen i oplošje pravilne četverostrane piramide ako je duljina njezinog osnovnog brida 8 cm i mjera kuta između pobočke i ravnine baze 65°56'. 8. Izračunajte volumen i oplošje pravilne četverostrane piramide ako je duljina njezine visine 14 cm i mjera kuta između pobočke i ravnine baze 71°17'. 9. Izračunajte oplošje i obujam pravilne četverostrane piramide ako je duljina pobočnog brida $b = 8$ cm i duljina visine pobočke $v_1 = 6$ cm. 10. Izračunajte oplošje i obujam pravilne četverostrane piramide ako je duljina visine piramide $v = 8$ cm i duljina pobočnog brida $b = 10$ cm. 11. Izračunajte oplošje pravilne trostrane piramide ako je njezin volumen $180\sqrt{3}$ cm³, a duljina osnovnog brida 12 cm. 12. Izračunajte volumen pravilne trostrane piramide ako je površina baze $B = 243\sqrt{3}$ cm², a duljina visine pobočke $v_1 = 15$ cm. 13. Izračunajte volumen i oplošje pravilne šesterostrane piramide ako je duljina osnovnog brida 8 cm i duljina bočnog brida 17 cm. Kolika je mjera kuta između bočnog brida i ravnine baze? 14. Koliko litara vode stane u posudu u obliku uspravnog valjka kojemu je opseg baze 20π cm, a duljina visine 32 cm? Kolika je površina osnog presjeka tog valjka? 15. Koliko litara vode stane u posudu u obliku uspravnog valjka kojemu je površina baze 81π cm², a površina osnog presjeka 108 cm²? 16. Oplošje uspravnog valjka je 80π cm², visina je za 5 cm dulja od promjera baze. Izračunajte površinu plašta i volumen valjka. 17. Volumen uspravnog valjka je 375π cm³, visina je tri puta dulja od polumjera baze valjka. Izračunajte oplošje valjka. 18. Ako se 500 m³ nafte ulije u cisternu koja je oblika uspravnog valjak s polumjerom 3.5 m, kolika će biti dubina nafte u toj cisterni? 19. Duljina polumjera baze uspravnog stošca je 12 cm, a duljina njegove visine 35 cm. Izračunajte oplošje tog stošca i mjeru kuta između njegove izvodnice i ravnine baze. 20. Duljina polumjera baze uspravnog stošca je 16 cm, a površina njegovog plašta 1040π cm² . Izračunajte volumen tog stošca i mjeru kuta između njegove izvodnice i ravnine baze. 21. Izračunajte oplošje kugle ako je njezin volumen $\frac{9}{16}\pi$ cm³.	

KONTROLNA ZADAĆA – ZADACI ZA SAMOPROVJERU ZNANJA

PRIMJER PISANOG ISPITA ZNANJA IZ MATEMATIKE

1. a) Izračunajte Re(*z*), Im(*z*) i |*z*| kompleksnog broja: $z=\dfrac{1+i}{(2+i)\cdot(1-3i)}$.

   b) Izračunajte: $3i^{22}\cdot i^{29}-\left(i^{28}\right)^3-7\dfrac{i^{64}}{i^{10}}=$

   c) Izračunajte vrijednost izraza $\dfrac{z-\bar{z}}{-13i^{86}-z\cdot\bar{z}}$ ako je $z=-5+6i$.

2. Riješite kvadratne jednadžbe i kvadratnu nejednadžbu:
   a) $x^2\sqrt{5}-x\sqrt{125}=0$,
   b) $\dfrac{2x-1}{x-3}=\dfrac{1-2x}{3x+5}$,
   c) $5-8x+4x^2=0$,
   d) $(x-3)^2-(x-5)^2=5-(x-4)^2$,
   e) $2\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}=2$,
   f) $4x^2=\dfrac{2}{x^2}-7$,
   g) $3+x-2x^2\geq 0$.

3. Odredite $p\in\mathbf{R}$ tako da jednadžba $x^2+4(p-1)x+4p^2+8=0$ ima dva različita realna rješenja.

4. Riješite sustav jednadžbi: $\begin{cases}x^2-xy+y^2=7\\ x-y=1\end{cases}$.

5. Nacrtajte graf funkcije $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2-x+4$ (odredi istaknute točke grafa).

6. Grafički i računski odredite međusobni položaj pravca $x-y-1=0$ i parabole $y=x^2-x$.

7. Ako jedna stuba ima visinu 14 cm, a širinu 30 cm, pod kojim se kutom uspinjemo hodajući po stubištu?

8. Odredite duljinu stranice romba površine 20 cm² kojemu je mjera šiljastog kuta 59°59'.

9. Izračunajte opseg i površinu jednakokračnog trapeza ako su duljine njegovih osnovica 21 cm i 9 cm i mjera šiljastog kuta 40°15'.

10. Izračunajte:
    a) $-\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}64+3\log_{\sqrt{3}}\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}=$
    b) $100^{1-\log 2}=$
    c) $\dfrac{\log 24-3\log 2}{\log 0.81+2}=$
    d) $\log_{\sqrt{2}}5\cdot\log_{25}8=$

11. Riješite eksponencijalne i logaritamske jendnadžbe i nejednadžbe:

a) $0.2 \cdot \sqrt[3]{25^{x-2}} = 125^{-\frac{2}{3}}$
b) $\log x + \log(x-3) = 2\log(-x+6)$
c) $5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} = 3$
d) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-4) \leq \log_{\frac{1}{3}}(3x-9)$
e) $2^{3x-x^2} \cdot \frac{1}{16} \leq 0.5^{x+9}$

12. Koliko je oplošje kvadra kojemu su duljine osnovnih bridova 10 cm i 20 cm i u kojega stane 6 litara vode?

13. Volumen uspravnog valjka je 135π cm³, visina je pet puta dulja od polumjera baze valjka. Izračunajte oplošje valjka i kut između ravnine baze i dijagonale njegovog osnog presjeka.

14. Izračunajte oplošje i volumen pravilne četverostrane piramide kojoj je duljina visine 8 cm i kut između pobočke i ravnine baze 72°27'. Kolika je mjera kuta između pobočnog brida i ravnine baze?

KORIŠTENA LITERATURA:

[1] Lj. Kelava Račić, Z. Šikić, *Matematika* 2, udžbenik sa zbirkom zadataka za strukovne škole, I. i II. dio, Školska knjiga, Zagreb, 2007.
[2] Ivan Mrkonjić, *Matematika u struci* 2, udžbenik sa zbirkom zadataka, Neodidacta, Zagreb, 2007.
[3] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika* 2, udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred gimnazija, 1. i 2. dio, Element, Zagreb, 2006.