ŠKOLA ZA CESTOVNI PROMET
Zagreb

NASTAVNO PISMO
ZA PROGRAME OBRAZOVANJA ODRASLIH

Nastavni predmet:

MATEMATIKA

1. RAZRED

Zanimanje:

TEHNIČAR CESTOVNOG PROMETA

Autor: Marija Mlinarević, prof.

Zagreb, 2011.

KAKO KORISTITI NASTAVNO PISMO

Cijenjeni polaznici,

Svrha nastavnog pisma je olakšati Vam organizaciju samostalnog učenja, pripremanje i polaganje ispita te uspješno završavanje upisanog programa.

Na početku nastavnog pisma nalazi se sadržaj koji daje najkraći uvid u strukturu teksta, odnosno orijentacijski uvid u nastavne cjeline i jedinice koje su razrađene u nastavnom pismu i s kojima ćete se upoznati.

U razradi nastavnih cjelina definirani su novi pojmovi i objašnjena pravila i postupci koje koristimo u rješavanju zadataka. Slijedi niz detaljno objašnjenih primjera, popraćenih skicama i slikama, kroz koje uvježbavamo uvedeno. Pojmovi i pravila koje uvodimo, zbog lakšeg i bržeg snalaženja, istaknuti su na marginama. Prilikom učenja na margine možete zapisivati svoje osobne bilješke jer je nastavno pismo zamišljeno kao radni udžbenik.

Iza svake nastavne cjeline nalaze se zadaci za vježbu koje je dobro riješiti nakon proučenih primjera, posebno zato što se slični zadaci pojavljuju na ispitu. Na samome kraju nastavnog pisma nalazi se primjer ispita koji će Vam poslužiti za uvježbavanje gradiva i završnu samoprovjeru znanja. Sretno!

SADRŽAJ

1. REALNI BROJEVI

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:
1. *Zašto i kojim redom uvodimo skupove brojeva?*
2. *Kako vješto obavljati elementarne računske operacije u svakodnevnom životu? Gdje nam sve pomaže znanje o skupovima brojeva?*

1.1. PRIRODNI, CIJELI I RACIONALNI BROJEVI

Brojevi kojima se služimo za brojanje nazivaju se **prirodi brojevi**. Skup svih prirodnih brojeva označavamo oznakom $\mathbf{N}$. Dakle, *prirodni brojevi*

$$\mathbf{N} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,\ldots\}.$$

Najveći prirodan broj ne postoji, ali postoji **najmanji** i to **je broj 1**. Uočimo da broj **nula nije prirodan broj**, tj.

$$0 \notin \mathbf{N}.$$

Skup čiji su elementi svi prirodni brojevi i broj 0 označavamo $\mathbf{N_0}$ (čitamo: en nula).

$$\mathbf{N_0} = \{1,2,3,4,5,6,\ldots\} = \{0\} \cup \mathbf{N}.$$

Svaki prirodan broj ima **sljedbenika**. Sljedbenik prirodnog broja n je broj $n+1$. Svaki prirodan broj, osim broja 1, ima svog **prethodnika**. Prethodnik prirodnog broja $n \neq 1$ je broj $n-1$.

Česta je podjela prirodnih brojeva na **parne** i **neparne brojeve**. Parni brojevi su 2, 4, 6, 8, 10, 12, …, a neparni 1, 3, 5, 7, 9, 11, … Općenito, parni su brojevi brojevi oblika $2n$, a neparni brojevi oblika $2n-1$, gdje je $n \in \mathbf{N}$. *parni i neparni brojevi*

Prirodne brojeve zapisujemo pomoću znamenaka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9.

U skupu $\mathbf{N}$ definirane su operacije **zbrajanja** i **množenja**.

Kažemo da je **prirodan broj a djeljiv prirodnim brojen b** ako postoji prirodan broj k takav da je $a = k \cdot b$. Kaže se i „b dijeli a“, oznaka: $b|a$.

Tada je a **višekratnik** broja b, a b **djelitelj** (faktor) broja a.

Najveći zajednički djelitelj (mjera) prirodnih brojeva a, b, …, oznaka $NZD(a,b,\ldots)$, je najveći broj koji dijeli svaki od brojeva a, b, … *najveći zajednički djelitelj*

Najmanji zajednički višekratnik prirodnih brojeva a, b, …, oznaka $nzv(a,b,\ldots)$, je najmanji prirodan broj koji je djeljiv sa svakim od brojeva a, b, …

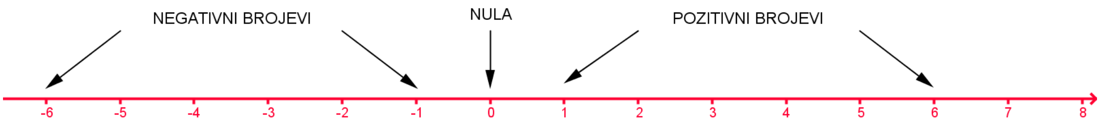
Kao što smo naveli, u skupu prirodnih brojeva definirane operacije zbrajanja i množenja, tj. zbroj i umnožak prirodnih brojeva uvijek je prirodan broj (kažemo da je skup prirodnih brojeva zatvoren na zbrajanje i množenje). Razlozi praktičnih problema (temperatura ispod ništice, visina vodostaja manja od uobičajene, manjak na računu i sl.) nametnuli su potrebu za uvođenjem operacije suprotne zbrajanju, operacije oduzimanja.

Rezultat oduzimanja $a-b$ kada je $a<b$ nije prirodan broj. To nas dovodi do potrebe za proširenjem skupa prirodnih brojeva negativnim brojevima i nulom. Dobiveni skup je **skup cijelih brojeva** kojeg označavamo slovom $\mathbf{Z}$, tj:

cijeli brojevi

$$\mathbf{Z}=\{\ldots,-4,-3,-3,-1,0,1,2,3,4,\ldots\}.$$

Smjestimo cijele brojeve na brojevni pravac:



Kažemo da **pozitivni cijeli brojevi** imaju pozitivan predznak, a **negativni brojevi** negativan predznak.
Brojeve -2 i 2, -10 i 10, -234 i 234 nazivamo **suprotnim brojevima**. Na brojevnom su pravcu suprotni brojevi jednako udaljeni od nule. Za brojeve -5 i 5 ta udaljenost iznosi 5 jedinica. Kažemo da je 5 apsolutna vrijednost brojeva -5 i 5 što označavamo:

$$|5|=5 \text{ i } |-5|=5.$$

Apsolutna vrijednost broja je njegova udaljenost od nule na brojevnom pravcu.

Zbrajanje i oduzimanje cijelih brojeva

zbrajanje i oduzimanje cijelih brojeva

Kod zbrajanja cijelih brojeva razlikujemo tri slučaja:

1. Pozitivne cijele brojeve zbrajamo kao prirodne brojeve:
$$12+13=25.$$
2. Negativne cijele brojeve zbrajamo tako da im zbrojimo apsolutne vrijednosti, a zbroju dodajemo negativan predznak:
$$-11+(-17)=-28.$$
3. Cijele brojeve različitih predznaka zbrajamo tako da od veće apsolutne vrijednosti oduzmemo manju apsolutnu vrijednost, a rezultatu dajemo predznak broja veće apsolutne vrijednosti:
$$-12+13=1,$$
$$11+(-17)=-6.$$

Zbroj suprotnih cijelih brojeva jednak je nuli:
$$5+(-5)=0.$$

Oduzimanje cijelih brojeva svodi se na zbrajanje suprotnog broja:
$$5-13=5+(-13)=-8.$$

Množenje i dijeljenje cijelih brojeva

Množenje cijelih brojeva svodi se na množenje njihovih apsolutnih vrijednosti, a predznak rezultata dajemo po pravilu: umnožak cijelih brojeva jednakih predznaka pozitivan je broj, a umnožak cijelih brojeva različitih predznaka negativan je broj, tj:

množenje cijelih brojeva

$$+\cdot+=+$$
$$-\cdot-=+$$
$$-\cdot+=-$$
$$+\cdot-=-$$

Množenjem s 1 broj se ne mijenja: $a\cdot 1=1\cdot a=a$.
Množenjem s -1, dobivamo suprotni broj: $a\cdot(-1)=(-1)\cdot a=-a$.
Za svaki cijeli broj a vrijedi: $a\cdot 0=0\cdot a=0$.

Dijeljenje cijelih brojeva povezano je s množenjem cijelih brojeva:

$a:b=c$ ako je $a=b\cdot c$.

Količnik cijelih brojeva jednakih predznaka pozitivan je broj, a različitih predznaka negativan broj.

Skup cijelih brojeva je zatvoren s obzirom na zbrajanje, množenje i oduzimanje. Drugim riječima, zbroj, umnožak i razlika cijelih brojeva uvijek je cijeli broj. Skup cijelih broje nije zatvoren na dijeljenje, računsku operaciju obrnutu od množenja; količnik dvaju cijelih brojeva nije uvijek cijeli broj. Zbog toga skup cijelih brojeva proširujemo do skupa racionalnih brojeva.

Količnici cijelih brojeva, poput $\frac{3}{5}$, $\frac{-13}{7}$, $\frac{2}{-15}$ su racionalni brojevi. Količnik bilo kojih dvaju cijelih brojeva racionalan je broj. Pritom moramo isključiti dijeljenje s nulom jer se nulom ne smije dijeliti.

Skup racionalnih brojeva označavamo slovom $\mathbf{Q}$:

racionalni brojevi

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{a}{b}:a,b\in Z,b\neq 0\right\}.$$

Racionalan broj je negativan ako je broj negativan, a nazivnik pozitivan i obrnuto:

$$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}.$$

Ako je brojnik racionalnog broja jednak nuli, broj je jednak nuli:

$$\frac{0}{a}=0,\ a\in\mathbf{Z},\ a\neq 0.$$

standardni oblik racionalnog broja

Svaki se racionalan broj može zapisati u obliku razlomka kojemu je nazivnik prirodan broj. Kažemo da je racionalan broj tada zapisan u **standardnom obliku**.

Za svaki racionalan broj $\frac{a}{b}$ i svaki $k \in \mathbf{Z},\ k \neq 0$ vrijedi:

PROŠIRIVANJE

$$\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a}{b}.$$

SKRAĆIVANJE

proširivanje i skraćivanje ralomaka

Istaknutu jednakost možemo čitati dvostrano. Čitamo li je zdesna ulijevo, tada je riječ o proširivanju razlomka, a čitamo li je s lijeva udesno, tada govorimo o skraćivanju razlomaka.

Proširiti razlomak znači njegov brojnik i nazivnik pomnožiti jednakim brojem različitim od nule.
Skratiti razlomak znači njegov brojnik i nazivnik podijeliti jednakim brojem različitim od nule ako taj broj postoji.

Proširivanjem svaki razlomak možemo zapisati sa željenim brojnikom ili nazivnikom.

Svaki se racionalan broj može skraćivanjem dovesti do **neskrativog** ili **do kraja skraćenog** razlomka, tj. razlomka u kojemu brojnik i nazivnik nemaju zajedničkih djelitelja.

Primjer 1. Razlomak $\frac{2}{3}$ proširimo brojem:

a) $2: \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6},$

b) $-3: \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot (-3)}{3 \cdot (-3)} = \frac{-6}{-9}.$

Primjer 2. Prikažimo razlomak $\frac{3}{4}$ u obliku razlomka kojemu je nazivnik 48.

Potrebno je razlomak proširiti brojem 12: $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 12}{4 \cdot 12} = \frac{36}{48}.$

Primjer 3. Zadane razlomke skratimo do neskrativih:

a) $\frac{-14}{21} = \frac{-2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{-2}{3},$

b) $\frac{4620}{819} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{220}{39}.$

1.2. OPERACIJE S RACIONALNIM BROJEVIMA

Zbrajanje i oduzimanje racionalnih brojeva

a) Zbrajanje i oduzimanje racionalnih brojeva jednakih nazivnika:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b},\quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}.$$

zbrajanje i oduzimanje racionalnih brojeva

Razlomke jednakih nazivnika zbrajamo (oduzimamo) tako da nazivnik prepišemo, a brojnike zbrojimo (oduzmemo).

b) Zbrajanje i oduzimanje racionalnih brojeva različitih nazivnika:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}\,,\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}\,.$$

Razlomke različitih nazivnika zbrajamo (oduzimamo) svođenjem na zajednički nazivnik. Za zajednički nazivnik možemo uzeti umnožak nazivnika. Računajući tako dobit ćemo ispravan rezultat, ali brojnik i nazivnik dobivenog rezultata vrlo često moći ćemo skratiti. Zbog toga, za zajednički nazivnik odabiremo najmanji zajednički višekratnik nazivnika.

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $\frac{7}{8}-\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{7-5-3}{8}=\frac{-1}{8}$,

b) $\frac{4}{3}+\frac{7}{12}-\frac{5}{8}=\frac{4\cdot 8+7\cdot 2-5\cdot 3}{24}=\frac{32+14-15}{24}=\frac{31}{24}$.

Zbroj cijelog broja i razlomka često kraće zapisujemo bez znaka zbrajanja:

$2+\frac{3}{4}=2\frac{3}{4}$ i čitamo: „dva cijela i tri četvrtine“.

Tako zapisan zbroj cijelog broja i razlomka nazivamo **mješovitim brojem**. *mješoviti broj*

Kažemo da je razlomak **pravi** ako je njegov brojnik manji (po apsolutnoj vrijednosti) od nazivnika. Inače, za razlomak kažemo da je **nepravi**.

Nepravi razlomak možemo zapisati u obliku mješovitog razlomka dijeljenjem brojnika nazivnikom. Dobiveni količnik je cijeli dio, a ostatak brojnik razlomka.

Primjer 2. Mješoviti broj $4\frac{2}{11}$ zapišimo u obliku razlomka:

Prema navedenom imamo: $4\frac{2}{11}=4+\frac{2}{11}=\frac{4\cdot 11+2}{11}=\frac{46}{11}$.

Primjer 3. Razlomak $\frac{23}{6}$ zapišimo u obliku mješovitog broja:

Iz $23:6=3$ i ostatak 5 slijedi $\frac{23}{6}=3\frac{5}{6}$.

Množenje i dijeljenje racionalnih brojeva

Prisjetimo se i pravila za množenje racionalnih brojeva:

množenje racionalnih brojeva

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\,.$$

Razlomke množimo tako da pomnožimo brojnik s brojnikom, a nazivnik s nazivnikom.

Primjer 4. Izračunajmo:

a) $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 7}=\frac{6}{35}$,

b) $\frac{-5}{2}\cdot 3=\frac{-5\cdot 3}{2\cdot 1}=\frac{-15}{2}$,

c) $-2\frac{1}{8}\cdot\frac{-5}{2}=-\frac{17}{8}\cdot\frac{-5}{2}=\frac{-17\cdot(-5)}{8\cdot 2}=\frac{85}{16}=5\frac{5}{16}$,

d) $\frac{4}{25}\cdot\frac{5}{12}=\{skratimo\ razlomke\}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 1}{5\cdot 3}=\frac{1}{15}$.

Množenjem brojem 1 razlomak se ne mijenja: $\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b}$.

Množenjem razlomka nulom dobivamo nulu: $\frac{a}{b}\cdot 0=0$.

Recipročna vrijednost racionalnog broja $\frac{a}{b}$ je racionalni broj $\frac{b}{a}$.

Primjer 5. Popunimo tablicu:

racionalan broj	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	3	$-\frac{7}{6}$	$3\frac{2}{5}$
recipročna vrijednost	$\frac{4}{3}$	2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{6}{7}$	$\frac{5}{17}$

Razlomak $\frac{a}{b}$ dijelimo razlomkom $\frac{c}{d}$ tako da ga pomnožimo recipročnim razlomkom $\frac{d}{c}$:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

dijeljenje racionalnih brojeva

Primjer 6. Izračunajmo:

a) $\frac{4}{5}:\frac{7}{8}=\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{7}=\frac{32}{35}$,

b) $-\frac{8}{9}:4=-\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{4}=-\frac{2}{9}$.

Količnik dvaju razlomaka može se zapisati u obliku **dvojnog razlomka**:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Pritom brojeve a i d nazivamo **vanjskim**, a brojeve c i d **unutarnjim članovima** dvojnog razlomka.
Zapamtimo: dvojni razlomak rješavamo tako da umnožak vanjskih članova zapišemo u brojnik, a umnožak unutarnjih članova u nazivnik razlomka.

Pogledajmo nekoliko zadataka u kojima uvježbavamo pravilan redoslijed računskih operacija i pravilan račun sa zagradama.

Ako je ispred zagrade znak zbrajanja, zagradu izostavljamo, a predznaci članova u zagradi ostaju nepromijenjeni.
Ako je ispred zagrade znak oduzimanja, pri izostavljanju zagrade članovi u zagradi mijenjaju predznake.

Ako se u zadatku pojavi više zagrada, redoslijed izostavljanja zagrada je od unutarnje zagrade prema vanjskoj. Najčešće je to u oznakama $(\ )$, $[\ ]$ i $\{\ \}$.

Primjer 7. Izračunajmo:

a) $-\frac{14}{35}-\left(-\frac{22}{35}\right)-\frac{-1}{-35}=-\frac{14}{35}+\frac{22}{35}-\frac{1}{35}=\frac{7}{35}=\frac{1}{5}$,

b) $-\frac{2}{9}+4:\left(\frac{1}{2}-5\right)+3\frac{1}{9}:28=-\frac{2}{9}+4\cdot\frac{-2}{9}+\frac{28}{9}\cdot\frac{1}{28}=-\frac{2}{9}-\frac{8}{9}+\frac{1}{9}=-\frac{9}{9}=-1$,

c) $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cdot\left\{-\frac{8}{3}:\left(6-\frac{16}{3}\right)-\frac{4}{5}\cdot\left[12-\left(2-\frac{34}{29}\right)\cdot\frac{29}{12}\right]\right\}=$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cdot\left\{-\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{2}-\frac{4}{5}\cdot\left[12-\frac{24}{29}\cdot\frac{29}{12}\right]\right\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cdot\left\{-4-\frac{4}{5}\cdot[12-2]\right\}=$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cdot\left\{-4-\frac{4}{5}\cdot 10\right\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cdot\{-4-8\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cdot(-12)=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

d) $\dfrac{\frac{13}{2}-\frac{8}{3}}{\frac{13}{2}+\frac{8}{3}}:\frac{46}{25}+\frac{3}{11}=\dfrac{\frac{39-16}{6}}{\frac{39+16}{6}}\cdot\frac{25}{46}+\frac{3}{11}=\dfrac{\frac{23}{6}}{\frac{55}{6}}\cdot\frac{25}{46}+\frac{3}{11}=\frac{23}{55}\cdot\frac{25}{46}+\frac{3}{11}=$

$=\frac{5}{22}+\frac{3}{11}=\frac{11}{22}=\frac{1}{2}$.

Uspoređivanje racionalnih brojeva

Kad uspoređujemo racionalne brojeve najprije ih zapišemo u standardnom obliku, tj, tako da im je nazivnik prirodan broj.
Uspoređivanje racionalnih brojeva jednakih nazivnika je jednostavno, dovoljno je usporediti njihove brojnike, npr. vrijedi:

$$\frac{-15}{7}<\frac{-3}{7}<\frac{1}{7}<\frac{4}{7}<\frac{29}{7}.$$

Racionalne brojeve različitih nazivnika možemo usporediti tako da ih najprije proširimo do racionalnih brojeva jednakih nazivnika, a onda im usporedimo brojnike.

Drugi je način iskoristiti pravilo:

Neka su $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ racionalni brojevi, tako da su b i d prirodni brojevi. Racionalan broj $\frac{a}{b}$ je manji od racionalnog broja $\frac{c}{d}$ ako je cijeli broj ad manji od cijelog broja

uspoređivanje racionalnih brojeva

bc, tj:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ ako je } ad < bc.$$

Primjer 8. Usporedimo racionalne brojeve:

a) $\frac{2}{5}$ i $\frac{3}{7}$

Budući da je $2 \cdot 7 < 5 \cdot 3$, slijedi da je $\frac{2}{5} < \frac{3}{7}$.

b) $\frac{-3}{4}$ i $\frac{5}{-6}$

Zapišimo najprije dane racionalne brojeve u standardnom obliku: $\frac{-3}{4}$ i $\frac{-5}{6}$. Budući da je $-3 \cdot 6 > 4 \cdot (-5)$, slijedi da je $\frac{-3}{4} > \frac{5}{-6}$.

c) $\frac{-11}{-3}$ i $\frac{3}{11}$

Najprije je : $\frac{-11}{-3} = \frac{11}{3} = 3\frac{1}{3}$. Sada je očito $\frac{-11}{-3} > \frac{3}{11}$.

Decimalni zapis racionalnih brojeva

decimalni zapis racionalnog broja

Provedemo li razlomkom naznačeno dijeljenje dobivamo **decimalni zapis racionalnog broja**, tj. $\frac{a}{b} = a : b$.

Tako je:

$$-\frac{1}{2} = -1 : 2 = 0.5,\ \frac{3}{4} = 3 : 4 = 0.75 \text{ i } \frac{9}{8} = 9 : 8 = 1.125.$$

Navedeni primjeri su konačni decimalni brojevi. No, znamo i drugačije primjere:

$$\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0.333333333333\ldots,$$

$$-\frac{10}{11} = -10 : 11 = -0.909090909090\ldots,$$

$$\frac{3}{7} = 3 : 7 = 0.428571428571428571 4\ldots.$$

Decimalni je broj decimalnom točkom razdvojen na dva dijela: lijevo od decimalne točke je **cijeli dio** koji čine dekadska mjesta, a desno od decimalne točke **decimalni dio** koji čine decimalna mjesta. Mjesta desno od decimalne točke redom su: desetinke, stotinke, tisućinke, desettisućinke, itd.

Primjer 9. Odredimo decimalni zapis racionalnih brojeva i rastavimo nazivnike zadanih brojeva na proste faktore:

a) $\frac{5}{8} = 5 : 8 = 0.625$ i $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$,

b) $\frac{101}{40} = 101 : 40 = 2.525$ i $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$,

c) $\frac{2}{9}=2:9=0.222\ldots=0.\dot{2}$ i $9=3\cdot 3$,

d) $\frac{20}{21}=20:21=0.95238095238095\ldots=0.\dot{9}5238\dot{0}$ i $21=3\cdot 7$,

e) $\frac{5}{6}=5:6=0.8333\ldots=0.8\dot{3}$ i $8=2\cdot 3$,

f) $\frac{23}{15}=23:15=1.5333\ldots=1.5\dot{3}$ i $15=5\cdot 3$.

Zaključujemo:

Razlomak $\frac{m}{n}$ zapisan u neskrativom obliku ima:

1. konačan decimalni zapis ako se u rastavu nazivnika na proste faktore pojavljuju jedino faktori 2 i/ili 5 (a) i b) dio primjera),
2. beskonačan čisto periodni decimalni zapis ako se u rastavu nazivnika na proste faktore ne pojavljuje ni faktor 2 ni faktor 5 (c) i d) dio primjera),
3. beskonačan mješovito periodni decimalni zapis ako se u rastavu nazivnika na proste faktore uz faktore 2 i/ili 5 pojavljuje i neki drugi (e) i f) dio primjera).

Primjer 10. Bez dijeljenja odredi vrstu decimalnog zapisa racionalnih brojeva:

a) $\frac{23}{30}$ ima beskonačan mješovito periodni decimalni zapis jer je $30=5\cdot 3\cdot 2$,

b) $\frac{11}{20}$ ima konačan decimalni zapis jer je $20=5\cdot 2\cdot 2$,

c) $\frac{17}{33}$ ima beskonačan čisto periodni decimalni zapis jer je $33=11\cdot 3$.

Pogledajmo sada obrat. Racionalni broj zapisan u decimalnom obliku često je potrebno napisati u obliku razlomka. Za konačne decimalne brojeve to je jednostavno. Tako je:

$$0.25=\frac{25}{100}=\frac{1}{4},\ 2.7=\frac{27}{10},\ 0.247=\frac{247}{1000},\ \text{itd.}$$

Primjerom pokažimo kako se to radi za beskonačne periodne decimalne zapise.

Primjer 11. Decimalni broj zapišimo u obliku razlomka:

a) $0.\dot{3}$

Označimo zadani decimalni broj s r. Dakle, $r=0.\dot{3}=0.333\ldots$.
Zato je

$$\begin{aligned}10r&=3.333\ldots\\10r&=3+0.\dot{3}\\10r&=3+r\\9r&=3\\r&=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

b) $0.\dot{1}\dot{3}$

Označimo zadani decimalni broj s r. Dakle, $r=0.\dot{1}\dot{3}=0.131313\ldots$.

Zato je

$$100r = 13.131313\ldots$$
$$100r = 13 + 0.\dot{1}\dot{3}$$
$$100r = 13 + r$$
$$99r = 13$$
$$r = \frac{13}{99}.$$

Uočavimo: decimalni se broj s čisto periodnim decimalnim zapisom zapisuje u obliku razlomka tako da se u brojnik zapiše period koji se ponavlja, a u nazivnik onoliko znamenaka 9 koliko je znamenaka u periodu ponavljanja.

Primjer 12. Decimalni broj zapišimo u obliku razlomka:

a) $0.\dot{3}5\dot{7} = \dfrac{357}{999}$,

b) $1.\dot{1}23\dot{4} = 1 + 0.\dot{1}23\dot{4} = 1 + \dfrac{1234}{9999} = \dfrac{11233}{9999}$.

Primjer 13. Decimalni broj $0.91\dot{6}$ zapišimo u obliku razlomka.
Označimo zadani decimalni broj s r. Dakle, $r = 0.91\dot{6} = 0.91666\ldots$.
Tada je:

$$100r = 91.\dot{6}$$
$$100r = 91 + 0.\dot{6}$$
$$100r = 91 + \frac{6}{9}$$
$$100r = \frac{825}{9}$$
$$r = \frac{825}{900} = \frac{11}{12}.$$

1.3. REALNI BROJEVI I BROJEVNI PRAVAC

Iz prethodnih primjera zaključujemo da se svaki racionalni broj može zapisati kao racionalni broj s konačnim ili beskonačnim periodnim decimalnim zapisom. Prirodno se postavlja pitanje što je s decimalnim brojevima koji imaju beskonačan neperiodni decimalni zapis, npr.

$$0.1234567891011121314151617181920212223\ldots \text{ ili}$$
$$0.510152025303540455055607580859095100\ldots \text{ ili}$$
$$0.1223334444555556666667777777888888888\ldots.$$

Navedeni brojevi s beskonačnim neperiodnim decimalnim zapisom su primjeri brojeva koji se ne mogu zapisati u obliku razlomka. Brojevi koji se ne mogu napisati u obliku razlomka nazivaju se **iracionalni brojevi**. *iracionalni brojevi*

Skup iracionalnih brojeva označavamo oznakom $\mathbf{I}$.

Takvi su npr. brojevi:

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \pi.$$

Općenito vrijedi:

Ako n nije kvadrat prirodnog broja onda je $\sqrt{n}$ iracionalan.

Primjer 1. Koji su od navedenih brojeva racionalni, a koji iracionalni:

a) $\frac{8}{5}$ je racionalan broj (zapis u obliku razlomka),

b) $\sqrt{100-25}$ je iracionalan broj jer $\sqrt{100-25}=\sqrt{75}$, a 75 nije kvadrat prirodnog broja,

c) $0.56\dot{7}$ je racionalan broj beskonačnog mješovito periodnog decimalnog zapisa,

d) $-8\pi^3+1$ je iracionalan broj jer je π iracionalan broj, pomnožen s racionalnim brojem pa pribrojen racionalnom broju opet daje iracionalan broj,

e) 3.14 je racionalan broj konačnog decimalnog zapisa

f) $\frac{1}{7}\sqrt{7}$ je iracionalan broj jer je $\sqrt{7}$ iracionalan broj koji pomnožen s racionalnim opet daje iracionalan broj,

g) $\sqrt{30+6}$ je racionalan broj jer je $\sqrt{30+6}=\sqrt{36}=6$ koji je prirodan broj, a skup racionalnih brojeva je proširenje skupa prirodnih brojeva.

Racionalni i iracionalni brojevi zajedno čine **skup realnih brojeva**. Kažemo i da je skup realnih brojeva unija skupa racionalnih brojeva i skupa iracionalnih brojeva. Skup svih realnih brojeva označavamo slovom $\mathbf{R}$.

realni brojevi

Vrijedi dakle:

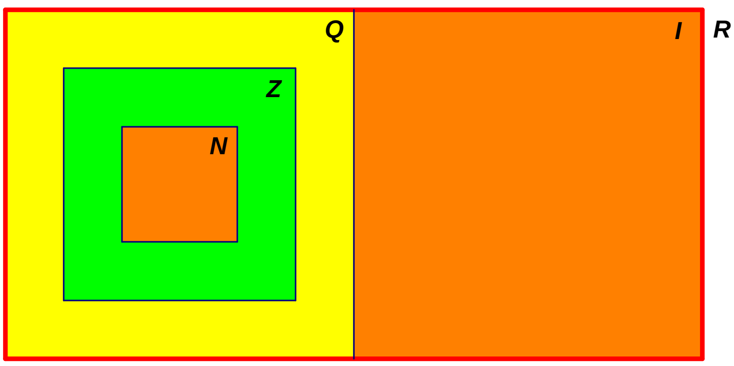
$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I} \quad \text{i} \quad \mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset.$$

Presjek skupa racionalnih i skupa iracionalnih brojeva je prazan skup, tj. ne postoji broj koji je ujedno i racionalan i iracionalan.

Prisjetimo se još jednom proučenih skupova brojeva i njihovih oznaka:

$\mathbf{N}$ … skup prirodnih brojeva
$\mathbf{Z}$ … skup cijelih brojeva
$\mathbf{Q}$ … skup racionalnih brojeva
$\mathbf{I}$ … skup iracionalnih brojeva
$\mathbf{R}$ … skup realnih brojeva

Vrijede skupovni odnosi: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ i $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$ i $\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset$ što možemo prikazati i grafički:



Ponovimo i svojstva operacija zbrajanja i množenja koja vrijede u čitavom skupu realnih brojeva:

svojstva realnih brojeva

$a+b=b+a$	**komutativnost**	$a\cdot b=b\cdot a$
$(a+b)+c=a+(b+c)$	**asocijativnost**	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
$a+0=a$	**neutralni element**	$a\cdot 1=a$
$a+(-a)=0$	**suprotni i inverzni broj**	$a\cdot\frac{1}{a}=a\cdot a^{-1}=1$

Broj $-a$ je **suprotan broj** broja a, a broj $\frac{1}{a}=a^{-1}$ **invertni** ili **recipročni broj** broju a, $a\neq 0$.

Osim nabrojenih svojstava, ranije smo naveli i svojstvo **distributivnosti (obostrane) množenja prema zbrajanju** (izostavljanje zagrade):

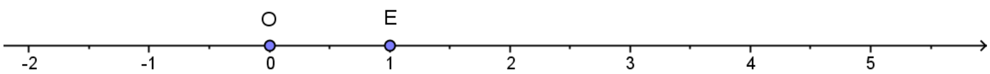
$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\ ,$$

koje tumačimo i kao izlučivanje zajedničkog faktora:

$$a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

brojevni pravac

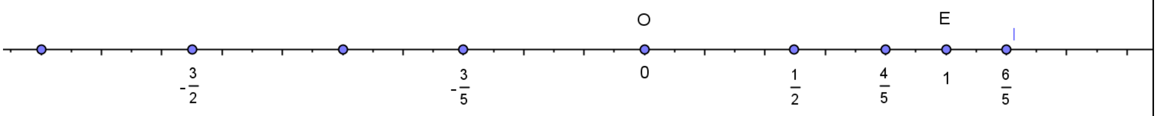
Brojeve grafički predočavamo na **brojevnom pravcu**. To je pravac na kojemu su istaknute dvije točke. Točka O pridružena broju 0, a točka E broju 1. Dužina $\overline{OE}$ naziva se **jedinična dužina**, a njezina duljina je **jedinica mjere**. Točku O nazivamo **ishodište koordinatnog sustava na pravcu**, a točku E **jedinična točka**. Koordinatni sustav na pravcu omogućuje nam da na pravac smjestimo brojeve, tj. da brojevima pridružimo točke pravca. Nanošenjem jedinične dužine desno od točke E odredit ćemo položaj prirodnih brojeva. Ako tu istu dužinu nanosimo lijevo od točke O, odredit ćemo položaj negativnih cijelih brojeva. Tako je udaljenost između svakih dvaju uzastopnih cijelih brojeva jednaka jediničnoj duljini.



Pogledajmo kako ćemo na brojevni pravac smjestiti racionalne brojeve. Ako su m i n prirodni brojevi, onda ćemo racionalan broj $\frac{m}{n}$ smjestiti ovako: jediničnu dužinu podijelimo na n jednakih dijelova i zatim nanesemo m takvih dužina udesno, počevši od broja 0. Ako je m negativan, onda dužine nanosimo lijevo od broja 0.

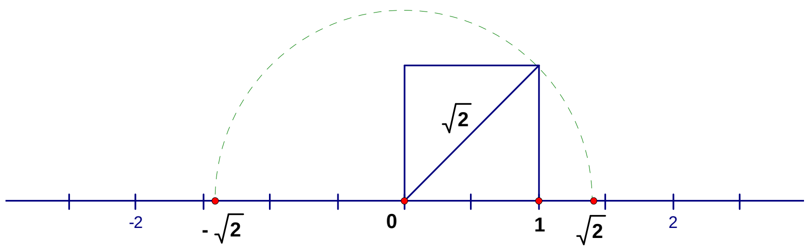
Primjer 2. Na brojevnom pravcu prikažimo brojeve $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{5}$ i $-\frac{3}{5}$.

Broj $\frac{1}{2}$ nalazi se na polovini udaljenosti između 0 i 1. Da bi na brojevni pravac smjestili broj $-\frac{3}{2}$, nanesemo dužinu duljine $\frac{1}{2}$ tri puta lijevo od broja 0. Za prikaz brojeva $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{5}$ i $-\frac{3}{5}$ najprije jediničnu dužinu podijelimo na pet jednakih dijelova, a zatim dužinu duljine $\frac{1}{5}$ nanosimo desno od broja 0 četiri i šest puta da bismo dobili brojeve $\frac{4}{5}$ i $\frac{6}{5}$, a tri puta lijevo od broja 0 da bismo prikazali broj $-\frac{3}{5}$:



Racionalnim brojevima nećemo popuniti čitavi brojevni pravac. Postoje točke na brojevnom pravcu koje nisu pridružene racionalnim brojevima. Te su točke pridružene iracionalnim brojevima.

Odredimo točku brojevnog pravca koja je pridružena iracionalnom broju $\sqrt{2}$. Znamo da duljina dijagonale kvadrata kojemu je stranica jedinična dužina ima duljinu $\sqrt{2}$:



Slično možemo odrediti točke pridružene iracionalnim brojevima $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $1+\sqrt{2}$, itd.

Smještanje iracionalnih brojeva na brojevnom pravcu nije jednostavno, ali njima popunjavamo praznine koje su na brojevnom pravcu ostale smještanjem racionalnih brojeva. Sada možemo reći:

Svakom realnom broju pridružena je točno jedna točka brojevnog pravca i svakoj točki brojevnog pravca pridružen je točno jedan realni broj.

Zato točke brojevnog pravca možemo poistovjetiti s realnim brojevima. Kažemo i da je brojevni pravac geometrijski prikaz (geometrijska interpretacija) skupa realnih brojeva, a nazivamo ga još i **realni pravac** ili **realna os**.

Realni broj x kojemu je pridružena točka T brojevnog pravca naziva se **koordinata točke** T i označava $T(x)$. Riječ koordinata i točka često smatramo istoznačnicama i zamjenjujemo ih.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Izračunajte:
   a) $(-31+14)\cdot(2-8)=$
   b) $(-31+14)\cdot 2-8=$

c) $-31+14\cdot(2-8)=$

d) $-31+14\cdot 2-8=$

2. Oslobodite se zagrada pa izračunajte:

a) $-[-(31+12)-(2-31)]-\{-15-[-7+(-3-15+7)]\}=$

b) $-\{47-[11-7+(47-16)+5]\}-[5-1-(-13-11+16)]=$

3. Izračunajte:

a) $-3-45:\{-14-2:[12-2\cdot(-3-2)+40:(-2)]\}=$

b) $14-\{44:(-11)-100:[13-2\cdot(-4-2)]\}=$

4. a) Odredite $NZD(420{,}168)$ i $nzv(420{,}168)$.

b) Razlomak $\frac{420}{168}$ skratite do neskrativog razlomka.

c) Razlomak $\frac{11}{12}$ zapišite kao razlomak s nazivnikom 396.

5. Izračunajte:

a) $-\frac{-13}{25}-\left(-\frac{6}{25}\right)-\frac{-4}{-25}=$

b) $\frac{5}{6}-\left(2\frac{1}{3}+\frac{5}{2}\right):\left(4\frac{1}{3}+2\frac{2}{3}\right)=$

c) $13\frac{1}{2}:\frac{9}{4}-1\frac{7}{8}\cdot\left(7-\frac{5}{3}\right)=$

d) $-\frac{7}{10}-\frac{4}{5}\cdot\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right):\frac{5}{3}\right]=$

e) $\left[\frac{9}{4}-\frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{5}{6}\right)\right]:\left[\frac{1}{5}\cdot\left(3+\frac{1}{3}\right)+\frac{13}{36}\right]:\left(-\frac{2}{3}+1\right)=$

f) $\dfrac{\frac{11}{15}\cdot\left(3-\frac{7}{4}\right)}{\frac{5}{4}-1:\frac{3}{2}}-\frac{1}{7}:\frac{1}{2}=$

g) $\dfrac{36\frac{2}{3}:15+8\frac{2}{3}\cdot 7}{12\frac{1}{3}+8\frac{6}{7}:2\frac{4}{7}}=$

6. Racionalne brojeve napišite u decimalnom obliku:

a) $\frac{4321}{10000}=$

b) $\frac{5}{11}=$

7. Bez dijeljenja odredite vrstu decimalnog zapisa racionalnih brojeva: $\frac{3}{40}$, $\frac{17}{12}$ i $\frac{3}{77}$.

9. Decimalne brojeve zapišite u obliku razlomaka: 4.0123, $1.\dot{3}2\dot{1}$ i $0.1\dot{4}$

10. Zaokružite iracionalne brojeve:

$\sqrt{11}-0.5$, $\sqrt{12+13}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, 0.333, $-\pi$, $0.22\dot{6}$, $\sqrt{100-81}$, $-\frac{7}{4}$

11. Na brojevnom pravcu prikažite brojeve $\frac{5}{2}$, $-\frac{7}{4}$, $\frac{7}{5}$, $-\frac{8}{5}$, $2+\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$.

2. ALGEBARSKI IZRAZI

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:

1. *Zašto uvodimo potencije? Kako računamo s potencijama?*
2. *Kako računamo s algebarskim izrazima?*
3. *Što su algebarski razlomci?*
4. *Kako rješavamo linearne jednadžbe i gdje ih susrećemo u svakodnevnom životu?*

2.1. POTENCIJE S CJELOBROJNIM EKSPONENTOM

Broj

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

naziva se ***n*-ta potencija broja *a***. Broj a je **baza (osnova) potencije**, a broj n **eksponent**. Pridruživanje koje broju a pridružuje a^n naziva se **potenciranje**. Za neke eksponente n potenciranje ima posebno ime: za $n = 2$ to je **kvadriranje**, a za $n = 3$ **kubiranje**.

potencija

baza potencije

eksponent

potenciranje

Po dogovoru je $a^1 = a$.

Uočimo da su potencije važne radi kraćih zapisivanja nekih matematičkih izraza.

Primjer 1. Sljedeće umnoške zapišimo u obliku potencija:

a) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^4$,

b) $-5\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = (-5)^5$,

c) $x\cdot x\cdot x\cdot x = x^4$,

d) $(a-b)\cdot(a-b)\cdot(a-b) = (a-b)^3$.

Primjer 2. Izračunajmo:

a) $2^5 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 32$,

b) $(-5)^3 = (-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = -125$,

c) $(-1)^{202} = 1$,

d) $(-1)^{3003} = -1$.

Dakle, ako su, kao ranije, parni brojevi brojevi oblika $2n$, a neparni brojevi oblika $2n-1$, gdje je $n \in \mathbf{N}$, onda vrijedi:

$$(-1)^{2n} = 1$$
$$(-1)^{2n-1} = -1 .$$

Primjer 3. Izračunajmo:

a) $3 \cdot 2^4 - 4 \cdot 3^3 + 5 \cdot 4^2 = 3 \cdot 16 - 4 \cdot 27 + 5 \cdot 16 = 48 - 108 + 80 = 20$,
b) $(-1)^{2007} - (-1)^{2008} - (-1)^{2009} = -1 - 1 - (-1) = -1 - 1 + 1 = -1$.

2.2. RAČUNANJE S POTENCIJAMA JEDNAKIH BAZA

Zbrajanje i oduzimanje potencija

Zbrajati i oduzimati možemo samo one potencije koje imaju i jednake baze i jednake eksponente.

Primjer 1. Izračunajmo:
a) $4x^2 - 5x^2 + 7x^2 = 6x^2$,
b) $a^3 + a^3 + a^3 + a^3 = 4a^3$,
c) $2x^{11} - 5x^9 + x^{11} - 2.5x^9 - 4x^{11} + 9.5x^9 = -x^{11} + 2x^9$.

zbrajanje i oduzimanje potencija

Važnija od kratkoće zapisivanja jesu svojstva potencija koja omogućavaju lakše računanje s brojevima i matematičkim izrazima.

Množenje potencija jednakih baza

Izračunajmo: $a^4 \cdot a^3$. Prema značenju potencija možemo pisati:
$$a^4 \cdot a^3 = (a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^7 .$$
Uočavamo:
$$a^4 \cdot a^3 ,$$
i zaključujemo da općenito vrijedi:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} .$$

Potencije jednakih baza množimo tako da baze prepišemo, a eksponente zbrojimo.

množenje potencija jednakih baza

Dijeljenje potencija jednakih baza

Postupimo slično kao kod množenja potencija jednakih baza i izračunajmo:
$$a^5 : a^2 = \frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a \cdot a \cdot a = a^3 .$$
Zaključujemo:
$$a^5 : a^2 = a^{5-2} = a^3 ,$$
i općenito:
$$a^m : a^n = a^{m-n} .$$

Potencije jednakih baza dijelimo tako da baze prepišemo, a eksponente oduzmemo.

dijeljenje potencija jednakih baza

Primjer 2. Izračunajmo:

a) $x^5 \cdot x^{11} = x^{5+11} = x^{16}$,

b) $10^3 \cdot 10^5 \cdot 10^7 = 10^{3+5+7} = 10^{15}$,

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^8 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^7 = \left(\frac{a}{b}\right)^{8+7} = \left(\frac{a}{b}\right)^{15}$,

d) $x^{11} : x^2 = x^{11-2} = x^9$,

e) $2^9 : 2^6 = 2^{9-6} = 2^3 = 8$,

f) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{20} : \left(-\frac{1}{3}\right)^{17} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{20-17} = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$.

Odredimo sada količnik $a^2 : a^5$ koristeći se pokazanim pravilom:

$$a^2 : a^5 = a^{2-5} = a^{-3}.$$

Također je

$$a^2 : a^5 = \frac{a^2}{a^5} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^3}.$$

Uočavamo da je:

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}.$$

Pri dijeljenju potencija javlja se praktična potreba za uvođenjem potencije čiji je eksponent negativan broj. Za $a \neq 0$ vrijedi općenito:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

negativan eksponent potencije

Za potenciju razlomka s negativnim eksponentom općenito vrijedi:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Primjer 3. Izračunajmo:

a) $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$,

b) $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$,

c) $\left(-\frac{5}{2}\right)^{-3} = \left(-\frac{2}{5}\right)^3 = -\frac{8}{125}$,

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 2^5 = 32$.

Primjer 4. Izračunajmo:

a) $x^{-6} : x^5 = x^{-6-5} = x^{-11} = \frac{1}{x^{11}}$,

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} : \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2-(-1)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} = -2$.

Pogledajmo što nam daje pravilo za dijeljenje potencija jednakih baza kada su i eksponenti jednaki:

$$a^n : a^n = a^{n-n} = a^0 .$$

Znamo da je

$$a^n : a^n = 1 ,$$

pa za svaku bazu $a \neq 0$ vrijedi:

$$a^0 = 1 .$$

Primjer 5. Izračunajmo:

a) $2^0 = 1$,

b) $(-123)^0 = 1$,

c) $\left(-\frac{8}{9}\right)^0 = 1$,

d) $(abc)^0 = 1$.

Ovime smo pojasnili naziv poglavlja *Potencije s cjelobrojnim eksponentom* jer smo uveli pojam potencije za svaki cjelobrojan eksponent, odnosno za pozitivne brojeve, negativne brojeve i nulu.

Primijenimo naučena pravila u sljedećem primjeru:

Primjer 6. Izračunajmo:

a) $\left(\frac{6}{7}\right)^0 - 8\cdot\left(9-8^0\right)\cdot\left(-\frac{5}{8}\right)^2 + 64\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = 1 - 8\cdot 8\cdot\frac{25}{64} + 64\cdot\left(-\frac{1}{64}\right) =$
$= 1 - 25 - 1 = -25$,

b) $\dfrac{8\cdot 2^{-3} + 9\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}}{13^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^0 - \left(\frac{1}{12}\right)^{-1}} = \dfrac{8\cdot\frac{1}{8} + 9\cdot\frac{49}{9}}{1+1-12} = \dfrac{1+49}{-10} = \dfrac{50}{-10} = -5$.

c) $\dfrac{7^{13}x^{10}y^7}{7^{11}x^{-6}y^9} = 7^{13-11}x^{10-(-6)}y^{7-9} = 7^2x^{16}y^{-2} = \dfrac{49x^{16}}{y^2}$.

Potenciranje potencija

Odredimo sada čemu je jednako $\left(a^5\right)^3$. Taj izraz možemo shvatiti kao potenciju s bazom a^5 i eksponentom 3, pa vrijedi:

$$\left(a^5\right)^3 = a^5\cdot a^5\cdot a^5 = a^{5+5+5} = a^{5\cdot 3} = a^{15} .$$

Općenito vrijedi:

$$\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n} .$$

potenciranje potencija

Potencije potenciramo tako da bazu prepišemo, a eksponente pomnožimo.

Primjer 7. Izračunajmo:

a) $\left(5^4\right)^5 = 5^{4\cdot 5} = 5^{20}$,

b) $\left(a^{-4}\right)^3 = a^{-4\cdot 3} = a^{-12}$,

c) $\left(\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-3}\right)^{-7} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{21} = \dfrac{1}{x^{21}}$.

U sljedećem primjeru primijenit ćemo sva spomenuta pravila:

Primjer 8. Izračunajmo:

a) $\left(2a^{-7}b^4c^2\right)^5 \cdot \left(3a^{12}b^{-10}c^{-4}\right)^2 = 32a^{-35}b^{20}c^{10} \cdot 9a^{24}b^{-20}c^{-8} = 288a^{-11}b^0c^2 =$

$= \dfrac{288c^2}{a^{11}}$,

b) $x^{-10} : \left[\left(x^7\right)^{-4} \cdot \left(x^{-3}\right)^{-5}\right] = x^{-10} : \left[x^{-28} \cdot x^{15}\right] = x^{-10} : x^{-13} = x^3$,

c) $\left(\dfrac{a^{-7}b^2}{a^4c^6}\right)^{-5} \cdot \left(\dfrac{a^{-11}b^3}{a^5c^{-7}}\right)^4 = \dfrac{a^{35}b^{-10}}{a^{-20}c^{-30}} \cdot \dfrac{a^{-44}b^{12}}{a^{20}c^{-28}} = \dfrac{a^{-9}b^2}{a^0c^{-58}} = \dfrac{b^2c^{58}}{a^9}$,

d) $\dfrac{125^4 \cdot 25^{-3}}{5^{13} \cdot 0.2^4} = \dfrac{\left(5^3\right)^4 \cdot \left(5^2\right)^{-3}}{5^{13} \cdot \left(5^{-1}\right)^4} = \dfrac{5^{12} \cdot 5^{-6}}{5^{13} \cdot 5^{-4}} = \dfrac{5^6}{5^9} = 5^{-3} = \dfrac{1}{125}$.

2.3. RAČUNANJE S POTENCIJAMA JEDNAKIH EKSPONENATA

Za potencije s jednakim eksponentima vrijedi:

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m.$$

Potencije s jednakim eksponentima množe se tako da se baze pomnože, a zajednički eksponent prepiše.

$$a^m : b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m = (a:b)^m,\ b \neq 0.$$

Potencije s jednakim eksponentima dijele se tako da se baze podijele, a zajednički eksponent prepiše.

množenje i dijeljenje potencija jednakih eksponenata

Primjer 1. Napišimo kao potenciju s eksponentom različit od 1 ili -1:

a) $3^5 \cdot 5^5 = (3 \cdot 5)^5 = 15^5$,

b) $(-27)^a : 3^a = (-27:3)^a = (-9)^a$,

c) $45^{x-1} : 5^{x-1} \cdot 11^{x-1} = (45:5 \cdot 11)^{x-1} = 99^{x-1}$,

d) $9^3 \cdot 2^6 = \left(3^2\right)^3 \cdot 2^6 = 3^6 \cdot 2^6 = (3 \cdot 2)^6 = 6^6$,

e) $125^2 : \dfrac{4^3}{27^2} = \left(5^3\right)^2 : \dfrac{\left(2^2\right)^3}{\left(3^3\right)^2} = 5^6 : \dfrac{2^6}{3^6} = 5^6 : \left(\dfrac{2}{3}\right)^6 = \left(5 \cdot \dfrac{3}{2}\right)^6 = \left(\dfrac{15}{2}\right)^6$.

2.4. RAČUNANJE S ALGEBARSKIM IZRAZIMA

algebarski izrazi

Izrazi oblika a^3b, x^5y-2xy, $2x^2-5x^4y^4+y^2$ itd. nazivaju se **algebarski izrazi**. Pribrojnici u algebarskim izrazima nazivaju se **monomi** ili **jednočlani izrazi**, npr: a^3b, x^5y, $-2xy$, $2x^2$, $-5x^4y^4$, y^2.
Zbrajanjem monoma dobivamo **binom** ili **dvočlani izraz**, npr. x^5y-2xy.
Trinom ili **točlani izraz** dobivamo kao zbroj triju monoma, npr. $2x^2-5x^4y^4+y^2$, a **polinom** ili **višečlani izraz** kao zbroj više monoma.

Simboli a, x i y u izrazima nazivaju se **opći brojevi**.

Primjer 1. Pomnožimo:

$$(5b+4)\cdot 2a = 5b\cdot 2a + 4\cdot 2a = 10ab + 8a\,.$$

Primjer 2. Pomnožimo:

$$(3a+2x)\cdot(2x-3y) = \{prema\ prethodnom\ primjeru\} =$$
$$= 3a\cdot(2x-3y) + 2x\cdot(2x-3y) = 6ax - 9ay + 4x^2 - 6xy\,.$$

Ovaj nas primjer dovodi do pravila množenje svakog člana zagrade sa svakim, tj.

$$(a+b)\cdot(c+d) = ac + ad + bc + bd\,.$$

Primjer 3. Pomnožimo:

$$(3x-4y)\cdot(x-3y+6) = \{svaki\ \check{c}lan\ druge\ zagrade\ mno\check{z}imo\ s\ 3x,\ a\ zatim\ s\ -4y\} =$$
$$= 3x^2 - 9xy + 18x - 4xy + 12y^2 - 24y = 3x^2 + 18x - 13xy - 24y + 12y^2\,.$$

2.5. KVADRAT I KUB BINOMA

Najjednostavniji su binomi oblika $a+b$ i $a-b$. Radi što lakšeg računanja pogledat ćemo najprije što dobivamo njihovim kvadriranjem.

Prema značenju kvadriranja i naučenom množenju binoma dobivamo:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2\,,$$

Odnosno

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2\,.$$

Dolazimo do formula:

kvadrat zbroja i razlike

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \ldots \quad \textbf{kvadrat zbroja},$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \ldots \quad \textbf{kvadrat razlike}.$$

Slično pokazujemo i:

$$(a+b)^3 = (a+b)^2\cdot(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) =$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\,.$$

Dolazimo do formula:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$ ... **kub zbroja**,

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$ ... **kub razlike**.

kub zbroja i razlike

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $(3+x)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot x + x^2 = 9 + 6x + x^2$,

b) $\left(-a+\frac{1}{2}\right)^2 = (-a)^2 + 2\cdot(-a)\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = a^2 - a + \frac{1}{4}$,

c) $\left(3a^2 + 4a^6\right)^2 = \left(3a^2\right)^2 + 2\cdot 3a^2\cdot 4a^6 + \left(4a^6\right)^2 = 9a^4 + 24a^8 + 16a^{12}$.

Primjer 2. Izračunajmo:

a) $(x-2)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 2 + 2^2 = x^2 - 4x + 4$,

b) $(-2a-3b)^2 = (-2a)^2 - 2\cdot(-2a)\cdot 3b + (3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$.

Uočimo:

$(-2a-3b)^2 = [-(2a+3b)]^2 = (2a+3b)^2 =$

$= (2a)^2 + 2\cdot 2a\cdot 3b + (3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$

c) $\left(x^4 - \frac{1}{x^2}\right)^2 = \left(x^4\right)^2 - 2\cdot x^4\cdot\frac{1}{x^2} + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = x^8 - 2x^2 + \frac{1}{x^4}$.

Primjer 3. Primjenom formule za kvadrat binoma izračunajmo:

$$99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2\cdot 100\cdot 1 + 1^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801.$$

Primjer 4. Napišimo kao kvadrat binoma:

a) $4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 1 + 1^2 = (2x+1)^2$,

b) $\frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{3}a^2b^3 + \frac{1}{9}b^6 = \left(\frac{1}{2}a^2\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{1}{3}b^3 + \left(\frac{1}{3}b^3\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}b^3\right)^2$.

Primjer 5. Izračunajmo:

a) $(2a+b)^3 = (2a)^3 + 3\cdot(2a)^2\cdot b + 3\cdot 2a\cdot b^2 + b^3 = 4a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$,

b) $\left(\frac{1}{3}+x\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot x + 3\cdot\frac{1}{3}\cdot x^2 + x^3 = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}x + x^2 + x^3$.

Primjer 6. Izračunajmo:

a) $(a-3b)^3 = a^3 - 3\cdot a^2\cdot 3b + 3\cdot a\cdot(3b)^2 - (3b)^3 = a^3 - 9a^2b + 27ab^2 - 9b^3$,

b) $\left(x^4 - 2y^3\right)^3 = \left(x^4\right)^3 - 3\cdot\left(x^4\right)^2\cdot 2y^3 + 3\cdot x^4\cdot\left(2y^3\right)^2 - \left(2y^3\right)^3 =$.
$= x^{12} - 6x^8y^3 + 12x^4y^6 - 8y^9$.

Primjer 7. Napišimo kao kub binoma:

a) $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = (3x)^3 + 3\cdot(3x)^2\cdot 1 + 3\cdot 3x\cdot 1^2 + 1^3 = (3x+1)^3$,

b) $\frac{1}{8}a^3 - \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{2}a - 1 = \left(\frac{1}{2}a\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1}{2}a\right)^2\cdot 1 + 3\cdot\frac{1}{2}a\cdot 1^2 - 1^3 = \left(\frac{1}{2}a - 1\right)^3$.

2.6. RAZLIKA KVADRATA, RAZLIKA I ZBROJ KUBOVA

Pogledajmo sada čemu je jednak umnožak binoma $a+b$ i $a-b$:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2.$$

Dobivena formulu zapisuje s i ovako:

$$a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$$ … **razlika kvadrata**.

razlika kvadrata

Vrijede još dvije formule:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$ … **razlika kubova**,

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$ … **zbroj kubova**.

razlika i zbroj kubova

Primjer 1. Primjenom formula za razliku kvadrata izračunajmo:

a) $(x+3)\cdot(x-3)=x^2-3^2=x^2-9$,

b) $\left(2a+\frac{1}{5}b\right)\cdot\left(2a-\frac{1}{5}b\right)=(2a)^2-\left(\frac{1}{5}b\right)^2=4a^2-\frac{1}{25}b^2$.

Primjer 2. Napišimo u obliku umnoška:

a) $x^2-36=x^2-6^2=(x+6)\cdot(x-6)$,

b) $\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{16}b^2=\left(\frac{1}{2}a\right)^2-\left(\frac{1}{4}b\right)^2=\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}b\right)\cdot\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}b\right)$,

c) $0.16x^4-0.25y^6=(0.4x^2)^2-(0.5y^3)^2=(0.4x^2+0.5y^3)\cdot(0.4x^2-0.5y^3)$.

Primjer 3. Primjenom formula za zbroj i razliku kubova izračunajmo:

a) $(3a-b)\cdot(9a^2+3ab+b^2)=(3a)^3-b^3=27a^3-b^3$,

b) $\left(\frac{1}{2}+x^5\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x^5+x^{10}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3+(x^5)^3=\frac{1}{8}-x^{15}$.

Primjer 4. Napišimo u obliku umnoška:

a) $8x^3-27=(2x)^3-3^3=(2x-3)\cdot\left((2x)^2+2x\cdot 3+3^2\right)=(2x-3)(4x^2+6x+9)$,

b) $a^3+\frac{1}{125}=a^3+\left(\frac{1}{5}\right)^3=\left(a+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(a^2-a\cdot\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)=\left(a-\frac{1}{5}\right)\left(a^2-\frac{1}{5}a+\frac{1}{25}\right)$,

2.7. RASTAVLJANJE NA FAKTORE

Često je, radi pojednostavljenja, algebarski izraz potrebno **rastaviti na faktore**, tj. **napisati u obliku umnoška**. To činimo na jedan od sljedećih načina:

rastavljanje na faktore

1. primjenom formula (kvadrat binoma, razlika kvadrata),
2. metodom izlučivanja,
3. metodom grupiranja,
4. kombinacijom navedenih metoda.

U prethodnom odjeljku vidjeli smo kako algebarski izraz primjenom formula zapisujemo u obliku umnoška.
Ranije smo spomenuli i svojstvo distributivnost množenja prema zbrajanju:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c\,.$$

Primjenjujemo ga pri množenju kako bismo u nekim situacijama pojednostavnili složenije izraze („oslobađamo se zagrade“). Istim se pravilom koristimo pri množenju višečlanih algebarskih izraza.
Svojstvo distributivnosti možemo čitati i zdesna ulijevo:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c)\,.$$

Kažemo da smo dvočlani izraz zapisali u obliku umnoška ili da smo ga rastavili na faktore ili da smo **izlučili zajednički faktor**.

Primjer 2. Metodom izlučivanja zapišimo u obliku produkta:

a) $x^2 + xy = x \cdot x + x \cdot y = x \cdot (x+y)$,

b) $3m^3 + 6mn = 3m \cdot m^2 + 3m \cdot 2n = 3m \cdot (m^2 + 2n)$,

c) $21a^8b^3 + 14a^7b^7 = 7a^7b^3 \cdot 3a + 7a^7b^3 \cdot 2b = 7a^7b^3(3a+2b)$,

d) .$a \cdot (b+1) - b \cdot (b+1) = (b+1) \cdot (a-b)$.

U pribrojnicima valja uočiti njihov najveći zajednički djelitelj, tj. najveći broj koji je faktor i jednog i drugog te ga izlučiti ispred zagrade.

Ako se algebarski izraz sastoji od četiri i više monoma, rastavljanje na faktore može se postići nekim zgodnim **grupiranjem** nakon kojega slijedi metoda izlučivanja zajedničkog faktora.

Primjer 3. Metodom grupiranja zapiši u obliku produkta:

a) $2ab + 10a + 3b + 15 = (2ab + 10a) + (3b + 15) = 2a \cdot (b+5) + 3 \cdot (b+5) =$
$= (b+5) \cdot (2a+3)$

b) $3x^2 - 4x - 9xy^2 + 12y^2 = (3x^2 - 4x) - (9xy^2 - 12y^2) = x \cdot (3x-4) - 3y^2 \cdot (3x-4)$,
$= (3x-4) \cdot (x - 3y^2)$.

Rastavljanje višečlanih algebarskih izraza na faktore općenito je vrlo složen problem. Ovdje ćemo se ograničiti na one nama primjerene i poslužiti se kombinacijom spomenutih metoda: primjenom naučenih formula, izlučivanjem zajedničkog faktora i grupiranjem članova:

Primjer 4. Rastavimo na faktore:

a) $48a^3b - 27ab^3 = 3ab \cdot (16a^2 - 9b^2) = 3ab \cdot (4a+3b)(4a-3b)$,

b) $2x^5y^2 - 24x^4y^3 + 72x^3y^4 = 2x^3y^2 \cdot (x^2 - 12xy + 36y^2) = 2x^3y^2 \cdot (x-6y)^2$,

c) $a^3 - 10a^2 - 4a + 40 = (a^3 - 10a^2) - (4a - 40) = a^2 \cdot (a-10) - 4 \cdot (a-10) =$
$= (a-10) \cdot (a^2 - 4) = (a-10)(a+2)(a-2)$.

2.8. ALGEBARSKI RAZLOMCI

Razlomak kojemu je u brojniku i nazivniku algebarski izraz nazivamo **algebarskim razlomkom**. Dakle, algebarski razlomci su razlomci oblika:

$$\frac{b}{4a^2+ab},\ \frac{5a-3}{3a-6},\ \frac{a^2+6a+9}{a^2-9},\ \frac{3a^7b^2-9a^5b^3}{6a^5b-18a^3b^2}\ \ldots$$

Za njih vrijede ista pravila kao i za brojevne razlomke, tj. razlomke kojima su brojnik i nazivnik cijeli brojevi.

Skraćivanje algebarskih razlomaka

Algebarske razlomke skraćujemo kao i brojevne razlomke. Ako su brojnik i nazivnik djeljivi nekim algebarskim izrazom, onda se razlomak može skratiti tim izrazom. Do zajedničkog djelitelja dolazimo rastavljanjem brojnika i nazivnika na faktore, tj. zapisivanjem brojnika i nazivnika u obliku produkta.

Zapamtimo: Algebarske razlomke kratimo tek nakon što smo brojnik i nazivnik zapisali u obliku produkta. Kod zapisivanja u obliku produkta poslužit ćemo se jednom od naučenih metoda u prethodnom odjeljku.

skraćivanje algebarskih razlomaka

Primjer 1. Skratimo razlomak:

a) $\frac{2a^2b^3}{4ab^2}=\frac{2\cdot a\cdot b\cdot b^2}{2\cdot 2\cdot a\cdot b^2}=\{\textit{uočimo zajednički faktor } 2ab^2\}=\frac{ab}{2}$,

b) $\frac{125b^7c^9}{25b^{11}c^2}=\frac{5\cdot 25\cdot b^7\cdot c^2\cdot c^7}{25\cdot b^4\cdot b^7\cdot c^2}=\{\textit{uočimo zajednički faktor } 25b^7c^2\}=\frac{5c^7}{b^4}$,

c) $\frac{a^2-6a+9}{a^2-9}=\{\textit{primijenimo formulu za kvadrat razlike u brojniku, a razliku kvadrata u nazivniku}\}=\frac{(a-3)^2}{(a-3)(a+3)}=\{\textit{uočimo zajednički faktor } a-3\}=\frac{a-3}{a+3}$,

d) $\frac{x^2-xy}{xy-y^2}=\{\textit{brojnik i nazivnik zapišimo u obliku produkta metodom izlučivanja}\}$
$=\frac{x\cdot(x-y)}{y\cdot(x-y))}=\{\textit{uočimo zajednički faktor } x-y\}=\frac{x}{y}$,

e) $\frac{a^3b-ab^3}{a^3b+2a^2b^2+ab^3}=\{\textit{metoda izlučivanja}\}=\frac{ab\cdot(a^2-b^2)}{ab\cdot(a^2+2ab+b^2)}=\{\textit{primjena formula}\}=\frac{ab\cdot(a-b)(a+b)}{ab(a+b)^2}=\{\textit{uočimo zajednički faktor } ab(a+b)\}=\frac{a-b}{a+b}$,

f) $\frac{a^3+a^2+a+1}{a^3+a}=\{\textit{metoda grupiranja u brojniku, metoda izlučivanja zajedničkog faktora u nazivniku}\}=$
$=\frac{(a^3+a^2)+(a+1)}{a\cdot(a^2+1)}=\frac{a^2\cdot(a+1)+(a+1)}{a\cdot(a^2+1)}=\frac{(a+1)(a^2+1)}{a\cdot(a^2+1)}=\{\textit{uočimo zajednički faktor } a^2+1\}=\frac{a+1}{a}$.

Zbrajanje i oduzimanje algebarskih razlomaka

Za računanje s algebarskim razlomcima vrijede ista pravila kao i za računanje s brojevnim razlomcima. Algebarske razlomke jednakih nazivnika zbrajamo (oduzimamo) tako da nazivnik prepišemo, a brojnike zbrojimo (oduzmemo). Zajednički je nazivnik izraz koji sadrži faktore svih pojedinih nazivnika razlomaka koje zbrajamo (oduzimamo).

zbrajanje i oduzimanje algebarskih razlomaka

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $\frac{5a-3}{3a-5}+\frac{a+4}{3a-5}$

Razlomci koje zbrajamo imaju jednake nazivnike. To je ujedno zajednički nazivnik:

$$\frac{5a-3}{3a-5}+\frac{a+4}{3a-5}=\frac{5a-3+a+4}{3a-5}=\frac{6a+1}{3a-5}.$$

b) $\frac{4a+3}{2}-\frac{a-9}{4}-\frac{6a-2}{8}$

Razlomci koje oduzimamo nemaju jednake nazivnike. Zajednički nazivnik, odnosno najmanji zajednički višekratnik brojeva 2, 4 i 8 je broj 8:

$$\frac{4a+3}{2}-\frac{a-9}{4}-\frac{6a-2}{8}=\frac{4\cdot(4a+3)-2\cdot(a-9)-(6a-2)}{8}=$$

$$=\frac{16a+12-2a+18-6a+2}{8}=\frac{8a+32}{8}=\frac{8\cdot(a+4)}{8}=a+4.$$

c) $\frac{5a-3}{3a-6}+\frac{a+4}{4a-8}$

Razlomci koje zbrajamo nemaju jednake nazivnike. Nazivnik prvog razlomka je $3a-6=3(a-2)$, a nazivnik drugog razlomka $4a-8=4(a-2)$. Za zajednički nazivnik uzimamo izraz $12(a-2)$, tj:

$$\frac{5a-3}{3a-6}+\frac{a+4}{4a-8}=\frac{5a-3}{3(a-2)}+\frac{a+4}{4(a-2)}=\frac{4(5a-3)+3(a+4)}{12(a-2)}=$$

$$=\frac{20a-12+3a+12}{12(a-2)}=\frac{23a}{12(a-2)}.$$

d) $\frac{b}{4a^2+ab}-\frac{16a}{4ab+b^2}$

Razlomci koje oduzimamo nemaju jednake nazivnike. Nazivnik prvog razlomka je $4a^2+ab=a(4a+b)$, a nazivnik drugog razlomka $4ab+b^2=b(4a+b)$. Za zajednički nazivnik uzimamo izraz $ab(4a+b)$, tj:

$$\frac{b}{4a^2+ab}-\frac{16a}{4ab+b^2}=\frac{b}{a(4a+b)}-\frac{16a}{b(4a+b)}=\frac{b^2-16a^2}{ab(4a+b)}=$$

$$=\frac{(b-4a)(b+4a)}{ab(b+4a)}=\frac{b-4a}{ab}.$$

e) $\frac{a-36}{6a-36}+\frac{4a+6}{a^2-6a}$

Razlomci koje zbrajamo nemaju jednake nazivnike. Nazivnik prvog razlomka je $6a-36=6(a-6)$, a nazivnik drugog razlomka $a^2-6a=a(a-6)$. Za zajednički nazivnik uzimamo izraz $6a(a-6)$, tj:

$$\frac{a-36}{6a-36}+\frac{4a+6}{a^2-6a}=\frac{a-36}{6(a-6)}+\frac{4a+6}{a(a-6)}=\frac{a(a-36)+6(4a+6)}{6a(a-6)}=$$
$$=\frac{a^2-36a+24a+36}{6a(a-6)}=\frac{a^2-12a+36}{6a(a-6)}=\frac{(a-6)^2}{6a(a-6)}=\frac{a-6}{6a}.$$

Množenje i dijeljenje algebarskih razlomaka

množenje i dijeljenja algebarskih razlomaka

I već ranije naučena pravila za množenje i dijeljenje brojevnih razlomaka prihvaćaju se za množenje i dijeljenje algebarskih razlomka. Da bi u postupku množenja proveli skraćivanje, važno je prethodno brojnik i nazivnik zapisati u obliku umnoška.

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $\frac{3x^2y}{2a^3}\cdot\frac{4a^2}{2xy^2}=\frac{3x^2y\cdot 4a^2}{2a^3\cdot 2xy^2}=\frac{3x}{ay}$,

b) $\frac{15a-15b}{a^2+a}\cdot\frac{a^2-1}{3a^2-3b^2}=$ {*brojnike i nazivnike rastavimo na faktore i provedemo skraćivanje*} $=\frac{15(a-b)}{a(a+1)}\cdot\frac{(a+1)(a-1)}{3(a-b)(a+b)}=\frac{5(a-1)}{a(a+b)}$,

c) $\frac{6a+18}{2a-6}:\frac{a^2+6a+9}{a^2-9}=\frac{6a+18}{2a-6}\cdot\frac{a^2-9}{a^2+6a+9}=\frac{6(a+3)}{2(a-3)}\cdot\frac{(a-3)(a+3)}{(a+3)^2}=3$.

2.9. LINEARNA JEDNADŽBA

linearna jednadžba

Linearna jednadžba s jednom nepoznanicom je jednadžba oblika $ax+b=0$, gdje su a i b realni brojevi i $a\neq 0$.

Riješiti linearnu jednadžbu znači odrediti takav realan broj koji uvršten u jednadžbu umjesto nepoznanice x daje istinitu brojčanu jednakost.

Dvije jednadžbe su **ekvivalentne** ako imaju isto rješenje.

Linearnu jednadžbu rješavamo tako da je uzastopnom primjenom svojstava realnih brojeva svodimo na jednostavniju, ali ekvivalentnu jednadžbu.

postupci pri rješavanju linearne jednadžbe

U postupku rješavanja linearnih jednadžbi primjenjujemo sljedeća svojstva:

1. Ako lijevoj i desnoj strani jednadžbe dodamo ili oduzmemo isti broj, rješenje se ne mijenja. Ovo svojstvo često tumačimo: ako u jednadžbi članove prebacujemo na drugu stranu znaka jednakosti (s lijeve na desnu ili s desne na lijevu), mijenjamo im predznake.
2. Ako lijevu i desnu stranu jednadžbe pomnožimo ili podijelimo istim brojem različitim od nule, rješenje se ne mijenja.

Primjer 1. Riješimo jednadžbu: $8x-2+x=5x-10$.
I na lijevoj i na desnoj strani jednadžbe su i poznati i nepoznati članovi.

Nepoznate ćemo napisati na jednoj, a poznate članove na drugoj strani jednadžbe. Prema 1. svojstvu: ako poznate ili nepoznate članove prebacimo s jedne na drugu stranu jednakosti, promijenit ćemo im predznak:

$$8x + x - 5x = 2 - 10$$

Primjenom svojstva distributivnosti dobivamo:

$$4x = -8 \ / : 4 \qquad \text{(primijenimo 2. svojstvo)}$$

$$x = -2$$

Provjera: $8 \cdot (-2) - 2 + (-2) = 5 \cdot (-2) - 10$, odnosno $-20 = -20$.

Broj -2 je rješenje jednadžbe.

Primjer 2. Riješimo jednadžbu:

$$35 - 2 \cdot [3 \cdot (2x - 5) - 5 \cdot (9 - x)] = 3 \cdot (4x - 13) - 7x + 5.$$

Najprije se, primjenom svojstva distributivnosti, rješavamo zagrada, od unutarnje prema vanjskoj. Nakon toga, postupamo kao u *Primjeru 1.*

$$35 - 2 \cdot [6x - 15 - 45 + 5x] = 12x - 39 - 7x + 5$$

$$35 - 12x + 30 + 90 - 10x = 12x - 39 - 7x + 5$$

$$-27x = -189 \ / : (-27)$$

$$x = 7$$

Provjerite je li $x = 7$ rješenje zadane jednadžbe.

Primjer 3. Riješimo jednadžbu: $1 - \frac{x+6}{5} = \frac{x}{2} - 3$.

Svaki član jednadžbe najprije množimo s najmanjim zajedničkim nazivnikom (najmanjim zajedničkim višekratnikom) brojeva 5 i 2, tj. brojem 10:

$$10 - 2 \cdot (x + 6) = 5x - 30$$

$$10 - 2x - 12 = 5x - 30$$

$$-2x - 5x = -10 + 12 - 30$$

$$-7x = -28 \ / : (-7)$$

$$x = 4$$

Provjerite je li $x = 4$ rješenje zadane jednadžbe.

Primjer 4. Riješimo jednadžbu: $\frac{1}{x^2 - x} - \frac{x}{x-1} = -1$.

Najprije nazivnike razlomaka rastavimo na faktore:

$$\frac{1}{x(x-1)} - \frac{x}{x-1} = -1. \qquad \text{Uvjeti: } x \neq 0 \text{ i } x \neq 1$$

Zatim odredimo najmanji zajednički višekratnik nazivnika. To je broj $x(x-1)$. Njime pomnožimo svaki član jednadžbe. Dobivamo:

$$1 - x^2 = -x^2 + x$$

pa je $x = 0$.

Početni uvjet je $x \neq 0$ jer za $x = 0$ u prvom razlomku zadane jednadžbe dobivamo nulu u nazivniku. Stoga jednadžba nema rješenje.

Primjena linearne jednadžbe

Zadatke zadane tekstom koji se svode na rješavanje linearne jednadžbe nazivamo problemima prvog stupnja.

primjena linearne jednadžbe

Oni u sebi sadrže neki realan, praktičan problem s kojim se susrećemo u svakodnevnom životu, a za njihovo rješavanje nema posebnih recepata. No, rješavanje provodimo u nekoliko koraka:

1. Razumijevanje problema.
2. Odabiranje nepoznate veličine.
3. Postavljanje jednadžbe.
4. Rješavanje jednadžbe.
5. Formuliranje odgovora riječima.

Primjer 1. Za školu je kupljeno ukupno 18 velikih i malih lopti za 753 kune. Cijena velike lopte je 62.5 kuna, a male 31.5 kuna. Koliko je kupljeno velikih, a koliko malih lopti.

Ako s x označimo broj kupljenih velikih lopti, onda je $18-x$ broj kupljenih malih lopti. Prema uvjetima zadatka pišemo jednadžbu:

$$62.5x+31.5(18-x)=753$$

Rješavanjem jednadžbe dobivamo $x=6$.
Velikih lopti je kupljeno 6, a malih $18-6=12$.

Primjer 2. Otac ima 28 godina, a sin 4 godine. Za koliko će godina otac biti tri puta stariji od sina?

Za x godina će otac imati $28+x$ godina, a sin $4+x$. Prema uvjetima zadatka pišemo jednadžbu:

$$28+x=3(4+x)$$

Rješenje jednadžbe je $x=8$.
Za 8 godina otac će biti tri puta stariji od sina, tj. otac će imati 36 godina, a sin 12 godina.

Primjer 3. Iz mjesta A prema udaljenom mjestu B krene autobus i vozi stalnom brzinom od 70 km/h. Dva sata nakon njega na isti put krene automobil i vozi stalnom brzinom od 110 km/h. Za koliko vremena će automobil sustići autobus?

Za x sati vožnje autobusa automobil će voziti $x-2$ sata pa vrijedi:

$$70\cdot x=110\cdot(x-2)$$

Rješenje je $x=5.5$ sati, tj. automobil će sustići autobus za 5h i 30min.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Izračunajte:

a) $(-1)^{53}\cdot(-1)^{102}-\left[-(-1)^{99}\cdot(-1)^{22}\right]=$

b) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-2}\cdot 10^{-1}-\left(5+13^{-2}\right)^{0}=$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{0}-3\cdot\left(4-3^{0}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{2}-16\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{4}=$

d) $\left(\frac{2^{-1}+2^{-2}}{3^{-1}+3^{-2}}\right)\cdot\left(\frac{9}{2^{4}}\right)^{-1}=$

e) $\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}\cdot 2.5^0+2^{-4}}{(-0.4)^{-2}-\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-1}}=$

f) $3^5:3^3-4\cdot 3^2+6\cdot 3^{11}:3^9=$

g) $11\cdot 4^6+20\cdot 2^{10}=$

h) $x^{-5}:\left[\left(x^3\right)^{-4}\cdot\left(x^{-1}\right)^{-5}\right]=$

i) $\left(\dfrac{81x^3y^2}{16z^5}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{8z^{-2}}{24xy^{-3}}\right)^4=$

j) $\dfrac{9^9}{27^3\cdot 3^6}=$

k) $\dfrac{100^5\cdot 0.0001^{-3}}{1000^{-2}\cdot(-0.1)^5}=$

3. Izračunajte (služeći se formulama za kvadrat i kub binoma, razliku kvadrata i zbroj i razliku kubova):

a) $\left(\dfrac{1}{2}x^3y^4+4x^2y^7\right)^2=$

b) $\left(-3x^3y^3+\dfrac{1}{3}x^2y^2\right)^2=$

c) $\left(x^3-\sqrt{5}y^7\right)\cdot\left(x^3-\sqrt{5}y^7\right)=$

d) $\left(a^3+4a\right)^3=$

e) $\left(\dfrac{2}{5}a^2b-\dfrac{1}{2}ab^2\right)^3=$

f) $(2a-3)\cdot\left(4a^2+6a+9\right)=$

g) $\left(\dfrac{1}{3}ab+\dfrac{3}{4}c^2\right)\cdot\left(\dfrac{1}{9}a^2b^2-\dfrac{1}{4}abc^2+\dfrac{9}{16}c^4\right)=$

h) $(2a+3b)^2-(3a-2b)^2=$

i) $4\cdot(a+2)^2-9\cdot(a-1)^2=$

4. Napišite u obliku produkta (služeći se formulama za kvadrat i kub binoma, razliku kvadrata i zbroj i razliku kubova):

a) $36x^4y^4-121=$

b) $27a^3+54a^2b+36ab^2+8b^3=$

c) $\dfrac{1}{27}a^{12}+\dfrac{8}{125}=$

d) $49a^6+70a^3b^4+25b^8=$

e) $1-64x^9=$

f) $a^6b^6-12a^4b^4+48a^2b^2-64=$

g) $a^4b^4-8a^2b^2+16=$

5. Skratite razlomke:

a) $\dfrac{4a^4+4a^3b}{8a^6-8a^4b^2}=$

e) $\dfrac{a^2-6a+9}{3a-9}=$

b) $\dfrac{3a^4b^2-12a^2b^2}{4a^4b^3+8a^3b^3}=$

c) $\dfrac{16a^2-9b^2}{20ac+15bc}=$

d) $\dfrac{a^3-25a}{2a^2-10a}=$

f) $\dfrac{a^2-2a}{a^3-4a^2+4a}=$

g) $\dfrac{15ab-25b^2}{9a^2-30ab+25b^2}=$

h) $\dfrac{4a^2-12a+9}{9a-4a^3}=$

6. Izračunajte:

a) $\dfrac{a^2-9a}{a^2-6a+9}\cdot\dfrac{a^2-9}{a-9}=$

b) $\dfrac{x^3-27}{x+2}\cdot\dfrac{2x+4}{x^2-6x+9}=$

c) $\dfrac{a^2-b^2}{ab}:\dfrac{a+b}{a}=$

d) $\dfrac{5a+10}{5a-10}:\dfrac{a^2+4a+4}{a^2-4}=$

e) $\dfrac{2a+3b}{4}-\dfrac{6a-3b}{3}=$

f) $\dfrac{6x-1}{8x}-\dfrac{3-2x}{4x}+\dfrac{4-5x}{2x}=$

g) $\dfrac{3a^2}{6a+4}-\dfrac{2}{9a+6}=$

h) $\dfrac{2-a}{a^2+2a}-\dfrac{a}{a+2}=$

i) $\dfrac{12-y}{6y-36}-\dfrac{6}{y^2-6y}=$

j) $\dfrac{a-25}{5a-25}+\dfrac{3a+5}{a^2-5a}=$

k) $\dfrac{4b}{3a^2+2ab}-\dfrac{9b}{3ab+2b^2}=$

l) $\dfrac{a-1}{a^2-2a}-\dfrac{a}{a^2-4}=$

m) $\left(1-\dfrac{3x}{x+1}\right)\cdot\dfrac{x^2-1}{1-4x^2}=$

n) $\dfrac{1-4a^2}{6}:\left(a-\dfrac{a+1}{3}\right)=$

7. Riješite jednadžbe:

a) $31x-5-3\cdot\{2x-3\cdot[2x-3\cdot(2x-3)]\}=-1$,

b) $\dfrac{5x+1}{2}-\dfrac{1-3x}{4}-\dfrac{2x+3}{8}=\dfrac{x-3}{4}+\dfrac{5}{2}$,

c) $2-\dfrac{1}{3}\cdot\left(9+\dfrac{5}{2}x\right)=\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{6}\right)$,

d) $x-\dfrac{1}{2}\cdot\left[\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{3}\right)\right]=x-\dfrac{x-2}{3}$,

e) $\dfrac{x+1}{4}-3\cdot\left[\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{3}\cdot\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right]=1-\dfrac{x-6}{6}$,

f) $\dfrac{5}{3x+4}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{(x-1)(3x+4)}$,

g) $\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2x}{x^2-1}$.

8. Ivan je zamislio broj, pomnožio ga s $\dfrac{2}{3}$, od umnoška oduzeo 4, razliku podijelio s -2 i količniku pribrojio 8. Nakon računanja dobio je rezultat 5. Koji je broj zamislio?

9. Kad je biciklist prešao trećinu puta, do polovine puta ostalo mu je prijeći još 16 km. Koliko je dug put?

10. U parku je zasađeno 219 stabala. Hrastova je zasađeno tri puta manje nego javora, breza 14 više nego hrastova, a topola dva puta manje nego breza. Koliko je zasađeno stabala pojedine vrste?

11. Svi učenici neke škole planiraju ići na izlet. Ako naruče 15 jednakih

autobusa, ostat će 16 praznih sjedala. Ako naruče 14 takvih autobusa, za 20 učenika neće biti sjedećih mjesta. Koliko sjedala ima svaki autobus i koliko učenika ima u toj školi?

3. UREĐAJ NA SKUPU REALNIH BROJEVA

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:
1. *Kako uvodimo uređaj na skup realnih brojeva? Što su intervali?*
2. *Kako rješavamo linearne jednadžbe i sustave linearnih jednadžbi?*
3. *Što je apsolutna vrijednost realnog broja?*

3.1. UREĐAJ NA SKUPU REALNIH BROJEVA

Ranije smo vidjeli da realne brojeve dijelimo na pozitivne realne brojeve, negativne realne brojeve i nulu.
Ako je a pozitivan realan broj, pišemo $a > 0$ (čitamo a *je veći od nule*), a ako je negativan, pišemo $a < 0$ (čitamo a *je manji od nule*).
Geometrijski, $a > 0$ ako je a desno od nule na brojevnom pravcu, dok je $a < 0$ ako je a lijevo od nule na brojevnom pravcu.

Općenito, broj a je veći od broja b ako je a desno od broja b na brojevnom pravcu. To zapisujemo kao $a > b$ ili $b < a$ (čitamo b *je manji od* a). Na ovaj način uvodimo relaciju uređaja na skup realnih brojeva.

uređaj na skupu realnih brojeva

Uređaj na skup realnih brojeva možemo uvesti i bez pozivanja na brojevni pravac.

Realni broj a veći je od realnog broja b ako je broj $a-b$ pozitivan, tj:

$$a > b \text{ ako je } a-b > 0.$$

Svojstva relacije uređaja:
1. Vrijedi: $a < b$ ili $a = b$ ili $a > b$.
   Kažemo da su svaka realna broja usporediva.
2. Ako je $a < b$ i $b < c$, onda je $a < c$.
3. Ako je $a < b$, onda je $a + c < b + c$ za svaki realni broj c.
4. Ako je $a < b$, onda:
   a) za $c > 0$ vrijedi $a \cdot c < b \cdot c$,
   b) za $c < 0$ vrijedi $a \cdot c > b \cdot c$.

svojstva relacije uređaja

3.2. INTERVALI

intervali

Intervali su podskupovi skupa realnih brojeva.
Pišemo $a \leq b$ ako je broj a jednak broju b ili je manji od njega.
Uvedimo pojmove i oznake:

$[a,b]=\{x\in R : a\le x\le b\}$
zatvoreni interval (segment)

$\langle a,b\rangle=\{x\in R : a< x< b\}$
otvoreni interval

$[a,b)=\{x\in R : a\le x< b\}$
poluotvoreni ili poluzatvoreni interval

$(a,b]=\{x\in R : a< x\le b\}$
poluotvoreni ili poluzatvoreni interval

Uvedimo i pojmove i oznake beskonačnih intervala:

$[a,+\infty)=\{x\in R : x\ge a\}$

$\langle a,+\infty\rangle=\{x\in R : x> a\}$

$(-\infty,b]=\{x\in R : x\le b\}$

$\langle -\infty,b\rangle=\{x\in R : x< b\}$

Uvedenim skupovima i oznakama služimo se pri rješavanju linearnih nejednadžbi.

Primjer 1. Na brojevnom pravcu prikažimo sve realne brojeve sa svojstvom:

a) $x\le 3$:

b) $x>-1$:

c) $-2<x\le 3$:

d) $-1<x<3$:

e) $x > 2$ ili $x \le -3$:

U sljedećem primjeru odredimo uniju i presjek zadanih intervala, dvije skupovne operacije koje ćemo trebati u zadacima u odjeljku 3.4.

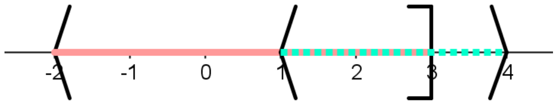
Primjer 1. Odredimo $A \cup B$ i $A \cap B$ ako je:

a) $A = (-2,3]$, $B = \langle 1,4 \rangle$,

b) $A = (-2,3]$, $B = (4,5]$,

c) $A = (-2,3]$, $B = \langle 3,4 \rangle$,

d) $A = (-2,3]$, $B = [3,4)$.

a) 

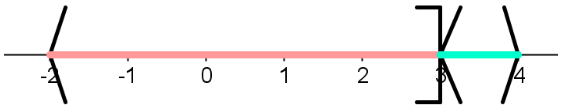
$A \cap B = (1,3]$

$A \cup B = \langle -2,4 \rangle$

b) 

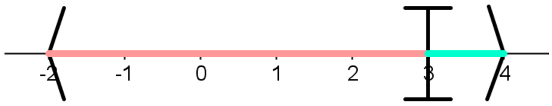
$A \cap B = \varnothing$

$A \cup B = (-2,3] \cup (4,5]$

c) 

$A \cup B = \varnothing$

$A \cup B = \langle -2,4 \rangle$

d) 

$A \cap B = \{3\}$

$A \cup B = \langle -2,4 \rangle$

3.3. LINEARNE NEJEDNADŽBE

linearna nejednadžba

Linearna nejednadžba s jednom nepoznanicom je nejednadžba oblika $ax + b < 0$, $ax + b \le 0$, $ax + b > 0$ ili $ax + b \ge 0$ gdje su a i b realni brojevi i $a \ne 0$.

Dakle, zamijenimo li u linearnoj jednadžbi znak jednakosti znakom nejednakosti, dobivamo linearnu nejednadžbu.

Broj je rješenje nejednadžbe ako uvršten u nejednadžbu daje istinitu nejednakost.

Riješiti nejednadžbu znači naći skup svih rješenja te nejednadžbe.

postupci pri rješavanju linearne nejednadžbe

Nejednadžbe rješavamo sličnim postupkom kao i jednadžbe:

1. Ako lijevoj i desnoj strani nejednadžbe dodamo ili oduzmemo isti broj, nejednakost ostaje nepromijenjena
2. a) Ako lijevu i desnu stranu nejednadžbe pomnožimo ili podijelimo pozitivnim brojem, nejednakost ostaje nepromijenjena.
   b) Ako lijevu i desnu stranu nejednadžbe pomnožimo ili podijelimo negativnim brojem, znak nejednakosti se mijenja.

Rješenje nejednadžbe zapisujemo u obliku intervala i prikazujemo na brojevnom pravcu.

Primjer 1. Riješimo nejednadžbu: $\frac{3}{5}x+\frac{1}{2}>\frac{3}{2}x-\frac{1}{5}$.

Pomnožimo lijevu i desnu stranu nejednadžbe najmanjim zajedničkim nazivnikom, tj. brojem 10. Budući da nejednadžbu množimo pozitivnim brojem, znak nejednakosti se ne mijenja:

$$\frac{3}{5}x+\frac{1}{2}>\frac{3}{2}x-\frac{1}{5}\ /\cdot 10$$
$$6x+5>15x-4$$
$$6x-15x>-4-5$$
$$-9x>-9\ /:(-9)$$

Nejednadžbu dijelimo negativnim brojem pa se mijenja znak nejednakosti:

$$x<1$$

Rješenja nejednadžbe pripadaju skupu svih realnih brojeva koji su manji od 1, tj. $x\in\langle-\infty,1\rangle$. Skup rješenja prikažite na brojevnom pravcu.

Primjer 2. Riješimo nejednadžbu: $\frac{x-4}{3}-2+\frac{x+1}{2}\le 2x-\frac{x-1}{6}$.

Lijevu i desnu stranu nejednadžbe množimo brojem 6.

$$\frac{x-4}{3}-2+\frac{x+1}{2}\le 2x-\frac{x-1}{6}\ /\cdot 6$$
$$2(x-4)-12+3(x+1)\le 12x-(x-1)$$
$$2x-8-12+3x+3\le 12x-x+1$$
$$2x+3x-12x+x\le 1+8+12-3$$
$$-6x\le 18\ /:(-6)$$
$$x\ge -3$$

Rješenja nejednadžbe pripadaju skupu svih realnih brojeva koji su veći ili jednaki -3, tj. $x\in[-3,+\infty\rangle$. Skup rješenja prikažite na brojevnom pravcu.

3.4. SUSTAVI LINEARNIH NEJEDNADŽBI

Sustav dviju linearnih nejednadžbi sastoji se od dviju linearnih nejednadžbi, a skup rješenja tog sustava je **presjek** skupova rješenja pojedinih nejednadžbi.

sustav linearnih nejednadžbi

Primjer 1. Riješimo sustav linearnih nejednadžbi:

a) $\begin{cases}3x-6\le 0\\ 2x+3>0\end{cases}$

Riješimo li prvu nejednadžbu sustava dobivamo $x\le 2$, a drugu $x>-\frac{3}{2}$.

Rješenje sustava je presjek dobivenih rješenja, tj. $x\in\left\langle-\frac{3}{2},2\right]$.

b) $\begin{cases}\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{3}<0\\ 0.2x-\frac{4}{5}\le 1.3+\frac{x}{2}\end{cases}$

Riješimo prvu nejednadžbu tako da najprije obje strane nejednadžbe pomnožimo brojem 6. Dobivamo:

$$3\cdot(x-1)-2\cdot(x+1)<0.$$

Sada je

$$3x-3-2x-2<0$$

pa je $x<5$.

Obje strane druge nejednadžbe pomnožimo brojem 10:

$$2x-8\le 13+5x$$

pa je $x\ge -7$.

Rješenje sustava je presjek dobivenih rješenja, tj. $x\in[-7,5\rangle$.

Primjer 2. Riješimo nejednadžbu: $(x-1)(x+2)<0$.

Izmnožimo li lijevu stranu nejednadžbe dobivamo: x^2+x+2 < 0,
tj. kvadratnu nejednadžbu koju kao takvu još ne znamo riješiti.
Zadatak rješavamo analizom predznaka umnoška (količnika) dvaju brojeva.

Umnožak (količnik) brojeva istog predznaka je pozitivan, a suprotnih predznaka negativan broj, tj:

$a\cdot b>0$ ako je $a>0$ i $b>0$ ili $a<0$ i $b<0$,
$a\cdot b<0$ ako je $a>0$ i $b<0$ ili $a<0$ i $b>0$.

Dakle, zadanu nejednadžbu možemo rastaviti na dva sustava linearnih nejednadžbi:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x+2<0 \end{cases} \text{ ili } \begin{cases} x-1<0 \\ x+2>0 \end{cases}.$$

Rješavamo svaki od sustava, a konačno rješenje dobivamo kao **uniju** njihovih rješenja.
Rješenje prvog sustava je prazan skup, a rješenje drugog skup $\langle -1,2\rangle$.
Konačno rješenje zadane nejednadžbe je $x\in \varnothing \cup \langle -1,2\rangle = \langle -1,2\rangle$.

Pogledajmo drugi način rješavanja zadane nejednadžbe.
Odredimo one x za koje se pojedini faktor poništava:

$$x-1=0 \quad\Rightarrow\quad x=1$$
$$x+2=0 \quad\Rightarrow\quad x=-2$$

To su nultočke tih izraza. One dijele brojevni pravac na tri intervala. Na tim intervalima odredimo predznake izraza $x-1$ i $x+2$.
Zbog preglednosti podatke upisujemo u tablicu predznaka. Predznak izraza na pojedinim intervalima dobijemo tako da uvrstimo bilo koji broj iz tog intervala. Izraz će imati jednak predznak lijevo od svoje nultočke, a suprotan desno od nje. Rješenje zadane nejednadžbe iščitavamo iz zadnjeg retka tablice.

$-\infty$	-2	1	∞
$x-1$	-	-	+
$x+2$	-	+	+
$(x-1)(x+2)$	+	-	+

Rješenje zadane nejednadžbe je $x\in\langle -1,2\rangle$.

Primjer 2. Riješimo nejednadžbu: $\frac{x+4}{3x-6} \geq 0$.

Riješimo nejednadžbu na oba pokazana načina.
1. način:
Zadanu nejednadžbu zapišemo kao dva sustava linearnih nejednadžbi:

$$\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 3x-6 > 0 \end{cases} \text{ ili } \begin{cases} x+4 \leq 0 \\ 3x-6 < 0 \end{cases}.$$

Rješenje prvog sustava je skup $\langle 2,+\infty \rangle$, a rješenje drugog skup $\langle -\infty,-4]$.

Konačno rješenje zadane nejednadžbe je $x \in \langle -\infty,-4] \cup \langle 2,\infty \rangle$.

2. način
Odredimo one x za koje se pojedini faktor poništava:

$$x+4=0 \quad \Rightarrow \quad x=-4$$
$$3x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x=2$$

Popunimo tablicu:

	$-\infty$	-4	2 ∞
$x+4$	-	+	+
$3x-6$	-	-	+
$\frac{x+4}{3x-6}$	+	-	+

Budući da je nultočka brojnika uključena, a nultočka nazivnika nije uključena u skup rješenja, konačno rješenje zadane nejednadžbe je $x \in \langle -\infty,-4] \cup \langle 2,\infty \rangle$.

3.5. APSOLUTNA VRIJEDNOST REALNOG BROJA

Realni brojevi -3 i 3, $\frac{5}{4}$ i $-\frac{5}{4}$ su parovi realnih brojeva koji se razlikuju u predznaku, ali imaju jednaku **apsolutnu vrijednost**. To znači da su točke koje su im pridružene na brojevnom pravcu jednako udaljene od ishodišta, samo su na suprotnim stranama. Na ovaj način smo geometrijski opisali apsolutnu vrijednost – udaljenost realnog broja od nule na brojevnom pravcu.

apsolutna vrijednost realnog broja

Apsolutnu vrijednost (modul) realnog broja x označavamo oznakom $|x|$.

Vidimo da je:

$$|-3| = |3| = 3 \text{ i } \left|-\frac{5}{4}\right| = \left|\frac{5}{4}\right| = \frac{5}{4}.$$

Vrijedi općenito:

$$|x| = \begin{cases} x & ako \quad x>0 \\ 0 & ako \quad x=0 \\ -x & ako \quad x<0 \end{cases}.$$

Ako je x pozitivan broj ili nula, onda je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Ako je x negativan broj, onda je njegova apsolutna vrijednost suprotan broj $-x$ koji je pozitivan.

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $$\frac{-|-3|-\left|-\frac{1}{2}\right|}{\left|-\frac{1}{3}\right|-|-2|}=\frac{-3-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}-2}=\frac{-\frac{7}{2}}{-\frac{5}{3}}=\frac{21}{10},$$

b) $\left|1-\left|1-|-2|\right|\right|=\left|1-|1-2|\right|=\left|1-|-1|\right|=|1-1|=|0|=0$.

Primjer 2. Odredimo:

a) $\left|1-\sqrt{2}\right|$

Budući da je $1-\sqrt{2}<0$, slijedi $\left|1-\sqrt{2}\right|=-\left(1-\sqrt{2}\right)=-1+\sqrt{2}=\sqrt{2}+1$.

b) $|\pi-3|$

Budući da je $\pi-3>0$, slijedi $|\pi-3|=\pi-3$.

c) $\left|2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right|=\left|\sqrt{12}-\sqrt{18}\right|=-\left(\sqrt{12}-\sqrt{18}\right)=\sqrt{18}-\sqrt{12}=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$.

Svojstva apsolutne vrijednosti:

1. $|x|\geq 0$

   $|x|=0$ ako i samo ako je $x=0$

2. $|xy|=|x|\cdot|y|$

   Apsolutna vrijednost umnoška jednaka je umnošku apsolutnih vrijednosti.

3. $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$, $y\neq 0$

   Apsolutna vrijednost kvocijenta jednaka je kvocijentu apsolutnih vrijednosti.

4. $|x+y|\leq|x|+|y|$ **nejednakost trokuta**

   Apsolutna vrijednost zbroja brojeva manja je ili jednaka zbroju apsolutnih vrijednosti tih brojeva.

svojstva apsolutne vrijednosti

Primjer 2. Provjerimo svojstva apsolutne vrijednosti 2. – 4. ako je $x=3$ i $y=-4$.

Izračunajmo lijevu i desnu stranu traženih svojstava:

2. $|xy|=|3\cdot(-4)|=|-12|=12$ i $|x|\cdot|y|=|3|\cdot|-4|=3\cdot 4=12$,

3. $\left|\frac{x}{y}\right|=\left|\frac{3}{-4}\right|=\frac{3}{4}$ i $\frac{|x|}{|y|}=\frac{|3|}{|-4|}=\frac{3}{4}$,

4. $|x+y|=|3+(-4)|=|-1|=1$ i $|x|+|y|=|3|+|-4|=3+4=7$, odnosno $1<7$.

Primjer 2. Napišimo izraz bez znaka apsolutne vrijednosti:

a) $$2x-3-|x|=\begin{cases}2x-3-x=x-3, & x\geq 0\\ 2x-3-(-x)=3x-3, & x<0\end{cases},$$

b) $$|2a-3|=\begin{cases}2a-3, & a\geq\frac{3}{2}\\ 3-2a, & a<\frac{3}{2}\end{cases}.$$

3.6. JEDNADŽBE I NEJEDNADŽBE S APSOLUTNIM VRIJEDNOSTIMA

jednadžbe s apsolutnim vrijednostima

Jednadžba $|x| = a$:

- ima dva rješenja $x_1 = a$ i $x_2 = -a$ ako je $a > 0$,
- ima rješenje $x = 0$ ako je $a = 0$,
- nema rješenja ako je $a < 0$.

Primjer 1. Riješimo jednadžbe:

a) $|x-2| = 3$

Imamo $x-2=3$ ili $x-2=-3$ što nam daje dva rješenja $x_1 = 5$ i $x_2 = -1$.

b) $|2-4x| = |3x-1|$

Ovdje je $2-4x = 3x-1$ ili $2-4x = -(3x-1)$ iz čega dobivamo dva rješenja $x_1 = \frac{3}{7}$ i $x_2 = 1$.

c) $-3 + |2x-1| = 4x$

Sredimo najprije jednadžbu: $|2x-1| = 3+4x$. Sada imamo dva slučaja: $2x-1 = 3+4x$ ili $2x-1 = -(3+4x)$ pa dobivamo $x_1 = -2$ i $x_2 = \frac{1}{3}$. Da bi jednadžba $|2x-1| = 3+4x$ imala rješenje, mora vrijediti $3+4x \geq 0$, tj. $x \geq -\frac{3}{4}$. Zato je jedino rješenje jednadžbe $x = \frac{1}{3}$.

d) $||1-2x|-2| = 7$

Krenimo kao i u prethodnim primjerima. Najprije je $|1-2x|-2 = 7$ ili $|1-2x|-2 = -7$, odnosno $|1-2x| = 9$ ili $|1-2x| = -5$. Jednadžba $|1-2x| = -5$ nema rješenja. Riješimo jednadžbu $|1-2x| = 9$. Imamo dva slučaja $1-2x = 9$ ili $1-2x = -9$. Dobivamo dva rješenja $x_1 = -4$ i $x_2 = 5$.

nejednadžbe s apsolutnim vrijednostima

Nejednadžba $|x| \leq a$:

- ima rješenje $-a \leq x \leq a$ ako je $a > 0$,
- ima rješenje $x = 0$ ako je $a = 0$,
- nema rješenja ako je $a < 0$.

Primjer 2. Riješimo nejednadžbu: $|4x-3| \leq 2$.

Prema navedenom imamo: $4x-3 \geq -2$ i $4x-3 \leq 2$ pa mora vrijediti $x \geq \frac{1}{4}$ i $x \leq \frac{5}{4}$. Tražimo presjek dobivenih skupova rješenja pa je $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right]$.

Nejednadžba $|x| \geq a$:

- ima rješenje $x \leq -a$ ili $x \geq a$ ako je $a > 0$,
- ima rješenje $x = 0$ ako je $a = 0$,
- ima za rješenje svaki realni broj ako je $a < 0$.

Primjer 3. Riješimo nejednadžbu: $|2-5x| \geq 3$.

Prema navedenom imamo: $2-5x \leq -3$ ili $2-5x \geq 3$, odnosno $x \geq 1$ ili $x \leq -\frac{1}{5}$ pa je rješenje nejednadžbe $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{5}\right] \cup [1, +\infty)$.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Riješite linearne nejednadžbe:

a) $-\frac{2}{3}x - 1 \geq 1\frac{1}{4}$,

b) $2(x-2) - 3(x-3) \geq 1 - 4(x-4)$,

c) $\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{4} \geq 0$,

d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}(1-x) \leq \frac{x+2}{4}$,

e) $0.2x - \frac{4}{5} \leq 2.5 + \frac{1}{2}x$,

f) $\frac{x+0.5}{2} - \frac{x-0.3}{3} \leq \frac{1}{6}$,

g) $\frac{3-2x}{4} - 1 \geq \frac{x}{3} - \frac{5x+1}{6}$,

h) $(2x+1)(x-2) \leq (2x+3)(x-4)$,

i) $(x-1)^2 \geq 1 + (x-1)(x+1)$,

j) $(x-1)^2 - (x+2)^2 \geq (x-3)^2 - (x-4)^2$.

2. Riješite sustave nejednadžbi:

a) $\begin{cases} 10 - 4x \geq 3(1-x) \\ 3.5 + \frac{x}{4} \leq 2x \end{cases}$,

b) $\begin{cases} 0.3x + \frac{x}{6} \geq \frac{x+1}{2} \\ \frac{2x-5}{3} - x \geq \frac{x}{2} \end{cases}$,

c) $\begin{cases} \frac{2x}{3} - 1 \leq 0.2x \\ \frac{x-1}{5} + 2 \leq \frac{x}{2} \end{cases}$.

3. Riješite nejednadžbe:

a) $(3x-2)(4x^2+3) \leq 0$,

b) $(x+1)(x^2+1) \geq 0$,

c) $\frac{-3}{2x+5} \geq 0$,

d) $\frac{-2}{-x+1} \leq 0$.

4. Riješite nejednadžbe:

a) $(x-1)(x-2) \geq 0$,

b) $(2x-1)(x+5) \leq 0$,

c) $\frac{x-3}{x+3} \geq 0$,

d) $\frac{-3x+8}{2x-1} \leq 0$.

5. Riješite nejednadžbe:

a) $\frac{2x-1}{2x+1} \leq 1$,

b) $\frac{x-2}{2x+3} \geq 2$.

8. Izračunajte: $\dfrac{-|-3| - \left|-\frac{1}{3}\right|}{\left|-\frac{1}{6}\right| - |2|} =$

9. Izračunajte vrijednost izraza $\dfrac{a|a-b| - b|a+b|}{|a-b| - |a+b|}$ za $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{2}{3}$.

10. Napišite bez znaka apsolutne vrijednosti:

a) $|3.5-\pi| =$ b) $|1-\sqrt{2}| =$ c) $|\sqrt{2}-\sqrt{3}| =$

11. Riješite jednadžbe:

a) $|3x-1| = |3-4x|$,

b) $||1-4x|-2| = 5$,

c) $-3x+|2x-3| = -2$.

12. Riješite nejednadžbu:

a) $|3-7x| \geq 4$,

b) $|3x-5| \leq 7$.

4. KOORDINATNI SUSTAV U RAVNINI

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:

1. *Kako uvodimo koordinatni sustav u ravninu?*
2. *Kako računamo udaljenost točaka u koordinatnoj ravnini?*
3. *Što je polovište dužine i kako računamo koordinate polovišta ako su poznate koordinate rubnih točaka dužine? Kako računamo površinu trokuta zadanog koordinatama svojih vrhova?*

4.1. KOORDINATNI SUSTAV U RAVNINI

pravokutan koordinatni sustav

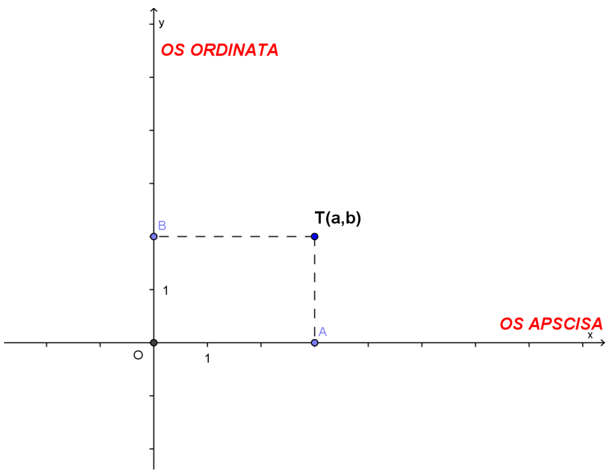
Postavimo u ravnini dva okomita brojevna pravca tako da im ishodišta budu u istoj točki. Tada kažemo da smo u ravninu uveli **pravokutan** ili **Kartezijev koordinatni sustav**.

koordinatna ravnina

koordinatne osi

ishodište koordinatnog sustava

Ravnina s uvedenim pravokutnim koordinatnim sustavom naziva se **koordinatna ravnina**, a polazni brojevni pravci **koordinatne osi**. Sjecište O tih pravaca nazivamo **ishodište koordinatnog sustava**. Koordinatne osi označavamo oznakama x i y i nazivamo **x-os** ili **os apscisa**, odnosno **y-os** ili **os ordinata**.



U koordinatnom sustavu točkama pridružujemo uređene parove realnih brojeva. Prisjetimo se, dva broje čine **uređen par** brojeva ako se zna koji je od njih prvi, a koji drugi broj.
Točku T koja je određena uređenim parom (a,b) realnih brojeva odredit ćemo na sljedeći način: na osi apscisa odredimo točku A s koordinatom a, a na osi ordinata točku B s koordinatom b (na kraju prethodnog poglavlja govorili smo o točkama brojevnog pravca i njihovim koordinatama). Točkama A i B položimo pravce paralelne s koordinatnim osima. Oni se sijeku u točki T koja je pridružena uređenom paru (a,b) dvaju realnih brojeva. Kažemo da su a i b **koordinate točke** T. Broj a je njezina **prva koordinata** ili **apscisa**, a broj b njezina **druga koordinata** ili **ordinata**.

koordinate točke

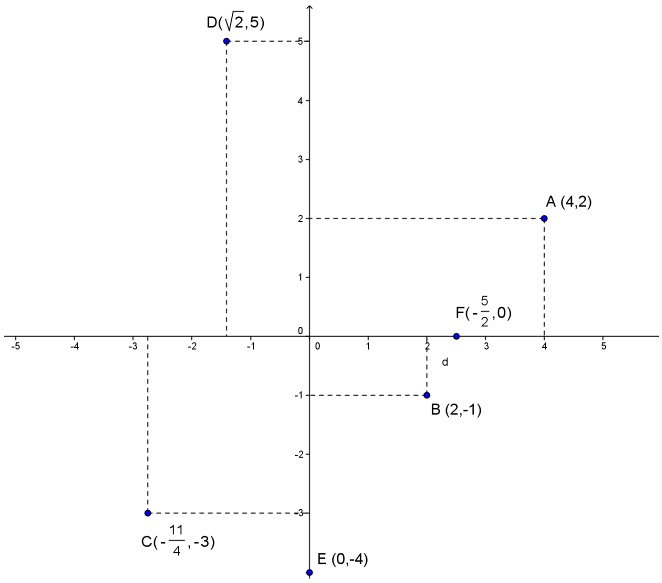
apscisa

ordinata

Primjer 1. U koordinatnom sustavu prikažimo točke:

$$A(4,2),\ B(2,-1),\ C\left(-\frac{11}{4},-3\right), D\left(-\sqrt{2},2\right),\ E(0,-4)\ \text{i}\ F\left(\frac{5}{2},0\right).$$

Postupajući prema opisanom, dobivamo:

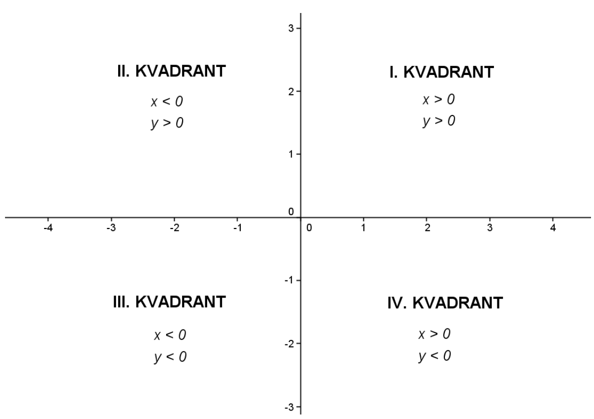


Zaključujemo:

Uređeni par realnih brojeva (a,b) određuje točno jednu točku T ravnine i obrnuto, točki T ravnine pridružen je točno jedan par uređenih brojeva (a,b).

Koordinatne osi dijele ravninu na četiri dijela koje nazivamo **kvadranti**. Kvadrante karakteriziraju predznaci koordinata njihovih točaka:

kvadranti



Primjer 2. Odredimo u kojem su kvadrantu točke:

$A(-5{,}3)$, $B(2{,}7)$, $C(0{,}6)$, $D(-10{,}0)$, $E(5,-5)$ i $F(-1,-1)$.

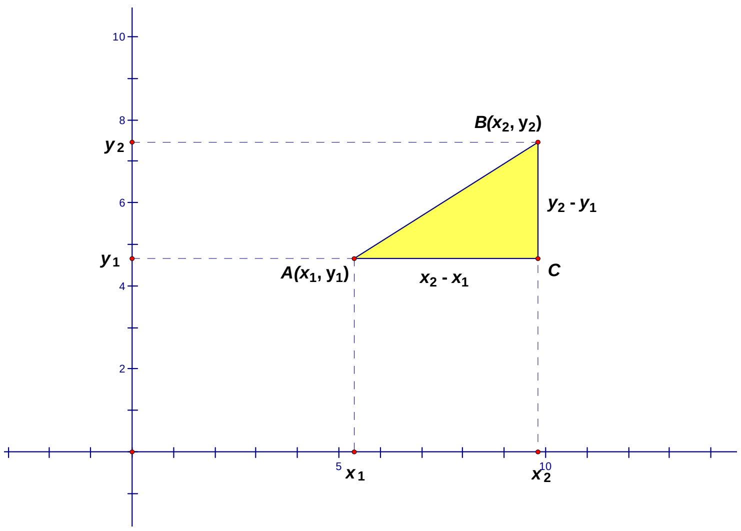
Toka A pripada II. kvadrantu, točka B I. kvadrantu, točka E IV. kvadrantu, a točka F III. kvadrantu. Točka C pripada osi apscisa, a točka D osi ordinata.

4.2. UDALJENOST TOČAKA U KOORDINATNOM SUSTAVU

U prethodnom smo odjeljku vidjeli da je točka u koordinatnoj ravnini jednoznačno određena svojim koordinatama. Pogledajmo sada kako pomoću koordinata točaka možemo odrediti njihovu udaljenost.

Neka su svojim koordinatama dane točke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$. Uvedimo oznaku:

$|AB| = d(A,B)\ldots$ udaljenost točaka A i B.



Promotrimo sliku. Uočimo pravokutni trokut ABC i primijenimo Pitagorin poučak:

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2}\,,$$

odnosno

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Dobili smo formulu za udaljenost točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ u koordinatnoj ravnini.

udaljenost točaka u koordinatnoj ravnini

Uočimo da možemo zamijeniti mjesta točkama A i B jer vrijedi:

$$|AB| = |BA|\,.$$

Primjer 1. Odredimo udaljenost točaka u koordinatnoj ravnini:

a) $A(-2{,}1)$ i $B(6{,}7)$.

Služeći se formulom za udaljenost točaka u koordinatnoj ravnini, uz $x_1 = -2$, $y_1 = 1$, $x_2 = 6$ i $y_2 = 7$, dobivamo:

$$|AB| = \sqrt{(6-(-2))^2 + (7-1)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10\,.$$

b) $M(-2,-3)$ i $N(-1,0)$.
Služeći se formulom za udaljenost točaka u koordinatnoj ravnini, uz $x_1=-2$, $y_1=-3$, $x_2=-1$ i $y_2=0$, dobivamo:
$|MN|=\sqrt{(-1-(-2))^2+(0-(-3))^2}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.

c) $S(-\sqrt{5},4)$ i $T(0,4)$.
Služeći se formulom za udaljenost točaka u koordinatnoj ravnini, uz $x_1=-\sqrt{5}$, $y_1=4$, $x_2=0$ i $y_2=4$, dobivamo:
$|ST|=\sqrt{\left(0-\left(-\sqrt{5}\right)\right)^2+(4-4)^2}=\sqrt{\sqrt{5}^2+0^2}=\sqrt{5}$.

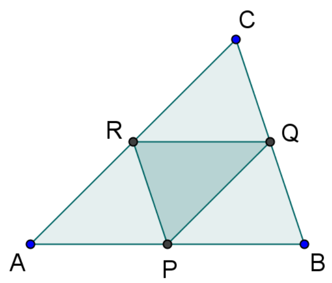
4.3. POLOVIŠTE DUŽINE

Polovište P dužine $\overline{AB}$ je točka koja dužinu dijeli na dva jednaka dijela.
Neka je $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ i $P(x_P,y_P)$. Polovište P dužine $\overline{AB}$ ima koordinate:

$$x_P=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y_P=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

polovište dužine

Primjer 1. $A(-7,-2)$ i $C(5,2)$ su vrhovi trokuta, a $P(-3,3)$ je polovište stranice $\overline{AB}$. Odredimo koordinate polovišta R dužine $\overline{AC}$, koordinate vrha B, a potom i koordinate polovišta Q stranice $\overline{BC}$.



Uvrštavanjem zadanih koordinata u formule za koordinate polovišta dužine najprije dobivamo:

$$x_R=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-7+5}{2}=-1 \text{ i}$$
$$y_R=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{-2+2}{2}=0,$$

odnosno $R(-1,0)$.
Budući da je $P(-3,3)$ polovište stranice $\overline{AB}$ imamo:

$$-3=\frac{-7+x_B}{2} \text{ pa je } x_B=1 \text{ i}$$
$$3=\frac{-2+y_B}{2} \text{ pa je } y_B=8,$$

odnosno $B(1,8)$.
Sada je:

$$x_Q=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{1+5}{2}=3 \text{ i}$$
$$y_Q=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{8+2}{2}=5,$$

odnosno $Q(3,5)$.

4.4. POVRŠINA TROKUTA

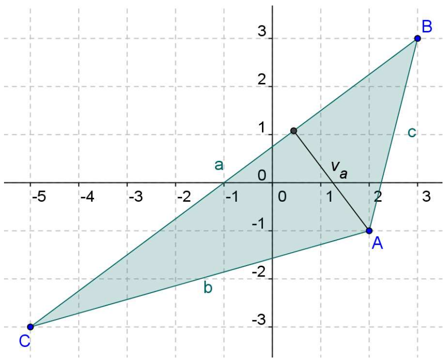
Ako su $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ vrhovi trokuta ABC, onda njegovu površinu računamo po formuli:

$$P = \frac{1}{2}\left|y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)\right|.$$

površina trokuta

Primjer 1. Koristeći formule za udaljenost točaka i površinu trokuta zadanog koordinatama vrhova, izračunajmo duljinu visine v_a trokuta ABC ako su $A(2,-1)$, $B(3,3)$ i $C(-5,-3)$ njegovi vrhovi.

Duljinu visine izračunat ćemo po formuli $P = \frac{a \cdot v_a}{2}$. Odredimo zato najprije duljinu stranice $a = |BC|$ i površinu zadanog trokuta:



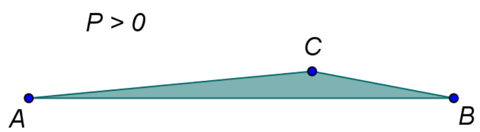
$$a = |BC| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} =$$
$$= \sqrt{(-5-3)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{100} = 10,$$

$$P = \frac{1}{2}\left|y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)\right| =$$
$$= \frac{1}{2}\left|-1\cdot(3+5) + 3\cdot(-5-2) - 3\cdot(2-3)\right| =$$
$$= \frac{1}{2}\left|-8 - 21 + 3\right| = \frac{1}{2}\cdot 26 = 13.$$

Sada je:

$$v_a = \frac{2P}{a} = \frac{2\cdot 13}{10} = \frac{13}{5}.$$

Primjer 2. Odredimo apscisu točke B tako da točke $A(-5,4)$, $B(x_B,2)$ i $C(10,-1)$ leže na istom pravcu.



Ako točke A, B i C leže na istom pravcu, onda je površina trokuta ABC jednaka nuli, tj. mora vrijediti:

$$\frac{1}{2}\left|4(x_B - 10) + 2(10+5) - 1(-5 - x_B)\right| = 0,$$

odnosno

$$|5x_B - 5| = 0.$$

Slijedi

$$5x_B - 5 = 0$$

pa je $x_B = 1$.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. U koordinatnom sustavu prikažite točke:
$A(4,-1)$, $B\left(0,-\sqrt{2}\right), C\left(-\frac{11}{2},0\right)$, $D\left(-\frac{12}{5},-5\right)$, $E\left(2\sqrt{3},4\right)$ i $F(-2.25,3.25)$.
2. Odredite udaljenost točaka u koordinatnoj ravnini:
   a) $A(-4,-2)$ i $B(3,1)$,
   b) $S(3,0)$ i $T\left(3,-\sqrt{2}\right)$.
3. Dužina $\overline{MN}$, $M(1,5)$ i $N(7,3)$, promjer je kružnice. U kojoj je točki središte kružnice? Kolika je duljina polumjera kružnice?

4. Kolike su duljine srednjica i težišnica trokuta ABC ako su vrhovi trokuta $A(-3,1)$, $B(3,-5)$ i $C(5,7)$?

5. Točke $A(-2,-3)$, $B(x,3)$ i $C(2,9)$ pripadaju jednom pravcu. Odredite nepoznatu koordinatu točke B.

6. Površina trokuta ABC je 4. Dva su njegova vrha u točkama $A(2,1)$ i $B(3,-2)$. Odredite koordinate vrha C ako vrh C: a) leži na osi x, b) leži na osi y.

7. Izračunajte površinu četverokuta $ABCD$ ako su zadani njegovi vrhovi $A(-4,0)$, $B(-1,-3)$, $C(3,-2)$ i $D(2,5)$.

8. Izračunajte duljinu visine na stranicu $\overline{AB}$ trokuta ABC ako su vrhovi trokuta $A(-3,2)$, $B(1,-1)$ i $C(-3,-3)$.

9. Izračunajte površinu trokuta PQR gdje su P, Q i R redom plovišta dužina $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC ako su zadani vrhovi $A(-2,-2)$ i $C(7,3)$ te polovište $P(2,-1)$ stranice $\overline{AB}$.

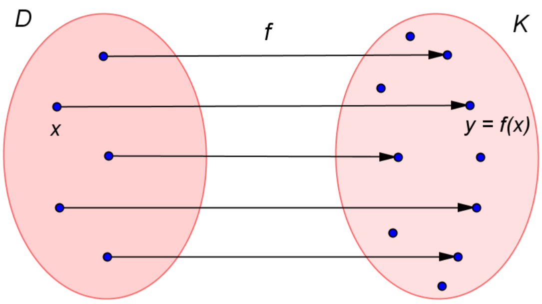
5. LINEARNA FUNKCIJA. SUSTAVI JEDNADŽBI

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:
1. *Što je funkcija i koji su temeljni pojmovi koje vežemo uz pojam funkcije?*
2. *Kojeg je oblika linearna funkcija, koja je vrlo česta u svakodnevnom životu?*
3. *Kako rješavamo sustave linearnih jednadžbi?*

5.1. POJAM FUNKCIJE

funkcija

Neka su D i K dva neprazna skupa. **Funkcija** f sa skupa D u skup K je pravilo (postupak) koje **svakom** elementu skupa D pridružuje **točno** jedan element skupa K, pišemo: $f: D \to K$ ili $x \mapsto y = f(x)$.



Skup D nazivamo **područje definicije** ili **domena** funkcije, a skup K **područje vrijednosti** ili **kodomena** funkcije f.

domena

kodomena

Element x skupa D nazivamo **argument funkcije** (**nezavisna varijabla** ili ulazna vrijednost funkcije), a njemu pridruženi element y, oznaka $y = f(x)$, nazivamo **vrijednost funkcije** (**zavisna varijabla**, izlazna vrijednost funkcije ili rezultat djelovanja funkcije na nezavisnu varijablu).

argument funkcije

vrijednost funkcije

5.2. LINEARNA FUNKCIJA

Linearna funkcija je najjednostavnija funkcija koja se pojavljuje u matematici, fizici i drugim prirodnim znanostima. Često i u svakodnevnim situacijama možemo modelirati pomoću linearne funkcije.

Funkciju oblika $f(x) = ax + b$, gdje su a i b realni brojevi i $a \neq 0$ nazivamo **linearna funkcija**.

linearna funkcija

Evo nekoliko primjera linearnih funkcija:

$$f(x) = 2x + 5,\ f(x) = -4x + \frac{1}{2},\ f(x) = 5.5x,\ f(x) = \sqrt{2}x - 3, \text{ itd.}$$

Primjer 1. Neka je $f(x) = 3x + 1$. Odredimo:

a) $f(0) = 3 \cdot 0 + 1 = 1$,

b) $f(3) = 3 \cdot 3 + 1 = 10$,

c) $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = 0$.

Linearna funkcija dobila je ime po tome što je njezin graf pravac (od lat. *linea*).

Graf linearne funkcije $f(x) = ax + b$ je pravac jednadžbe $y = ax + b$.

pravac

Jednadžbu pravca $y = ax + b$ nazivamo **eksplicitni oblik jednadžbe pravca**. Koeficijent a nazivamo **koeficijent smjera** ili **nagib pravca**, a koeficijent b **odsječak na y-osi** ili **pomak po y-osi**.

Primjer 2. U istom koordinatnom sustavu nacrtajmo pravce:

a) $y = 2x$,

b) $y = 2x + 3$,

c) $y = 2x - 1$,

d) $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

Odredimo nekoliko točaka zadanih pravaca:

a)

x	0	1	2
$y = 2x$	0	2	4

b)

x	0	1	-1
$y = 2x + 3$	3	5	1

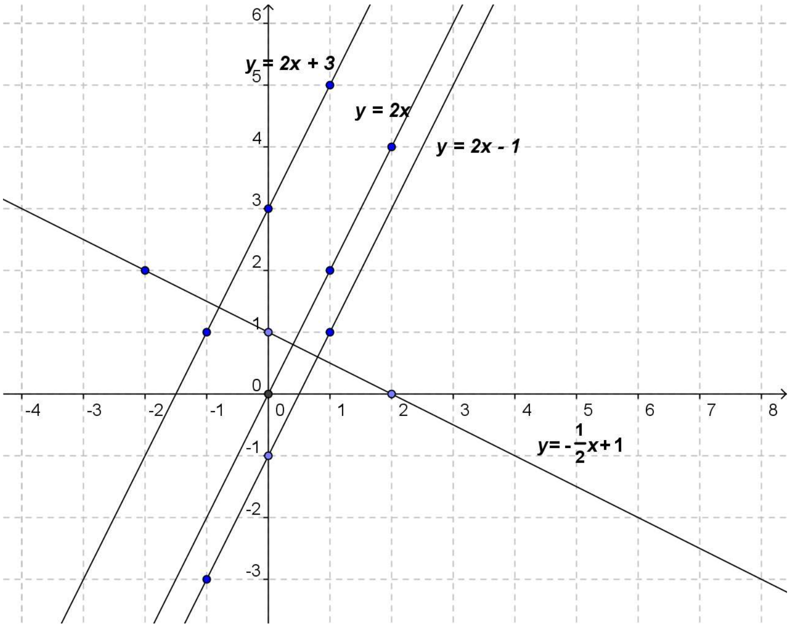
c)

x	0	1	-1
$y=2x-1$	-1	1	-3

d)

x	0	2	-2
$y=-\frac{1}{2}x+1$	1	0	2

Predočimo točke u koordinatnom sustavu i nacrtajmo pravce:



Promotrimo li sliku vidimo da su pravci $y=2x$, $y=2x+3$ i $y=2x-1$ rastući pravci (kada raste vrijednost x, raste i vrijednost funkcije y), a pravac $y=-\frac{1}{2}x+1$ padajući (kada raste vrijednost x, vrijednost funkcije y pada).

O rastu i pada pravca govori koeficijent smjera (nagib pravca) odakle i njegovo ime:

Pravac $y=ax+b$ raste ako je $a>0$, a pada ako je $a<0$.

Dalje, vidimo da su pravci $y=2x$, $y=2x+3$ i $y=2x-1$ međusobno paralelni pa zaključujemo:

Pravci su međusobno paralelni ako i samo ako imaju jednake koeficijente smjera, tj:

$$y=a_1x+b_1 \parallel y=a_2x+b_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1=a_2 .$$

paralelni pravci

Pravci $y=2x$ i $y=-\frac{1}{2}x+1$ međusobno su okomiti (a onda i pravci $y=2x+3$ i $y=-\frac{1}{2}x+1$ te $y=2x-1$ i $y=-\frac{1}{2}x+1$).

Pravci su međusobno okomiti ako i samo ako su njihovi koeficijenti smjera suprotni i recipročni, tj:

$$y=a_1x+b_1 \perp y=a_2x+b_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1=-\frac{1}{a_2} .$$

okomiti pravci

Pogledajmo dalje u kojim točkama zadani pravci sijeku y-os. Pravac $y = 2x$ prolazi ishodištem koordinatnog sustava, tj. siječe y-os u točki $(0,0)$, pravac $y = 2x + 3$ u točki $(0,3)$, pravac $y = 2x - 1$ u točki $(0,-1)$, a pravac $y = -\frac{1}{2}x + 1$ u točki $(0,1)$. Pročitajmo njihove odsječke na y-osi. Oni su redom 0, 3, -1 i 1.

Zaključujemo:
Pravac $y = ax + b$ siječe y-os u točki $(0,b)$.
Pravac $y = ax$ prolazi ishodištem koordinatnog sustava.

Primjer 2. Odgovorimo na sljedeća pitanja:

a) Pripada li točka $A(-2,1)$ pravcu $y = -2x - 5$? Zašto?
Točka pripada pravcu ako njezine koordinate ispunjavaju jednadžbu pravca.
Uvrstimo li koordinate točke A u jednadžbu pravca dobivamo:
$1 = -2 \cdot (-2) - 5$, odnosno $1 = -1$, što ne vrijedi pa zaključujemo da točka A ne pripada zadanom pravcu.

b) Odredimo ordinatu točke T ako ona pripada pravcu $y = -2x + 4$ i ako je njezina apscisa -3.
Iz istog razloga kao u a) dijelu zadatka imamo:
$y = -2 \cdot (-3) + 4 = 10$, odnosno ordinate točke T jednaka je 10.

c) Napišimo jednadžbu pravca koji raste i prolazi točkom $\left(0, \frac{3}{4}\right)$.
Budući da je traženi pravac rastući, njegov koeficijent smjera može biti bilo koji $a > 0$, a budući da prolazi točkom $\left(0, \frac{3}{4}\right)$ njegov odsječak na y-os je $b = \frac{3}{4}$. Jednadžba jednog takvog pravca je $y = x + \frac{3}{4}$.

d) Napišimo jednadžbu dvaju pravaca koji su paralelni s pravcem $y = -2x + 5$.
Pravci su paralelni ako imaju jednake koeficijente smjera pa su jednadžbe traženih pravaca npr: $y = -2x - 1$ i $y = -2x + \sqrt{2}$.

e) Napišimo jednadžbu pravca koji prolazi ishodištem koordinatnog sustava i okomit je na pravac $y = -3x + 4$.
Traženi pravac prolazi ishodištem koordinatnog sustava pa je $b = 0$ i okomit je na pravac $y = -3x + 4$ pa je $a = \frac{1}{3}$ jer okomiti pravci imaju suprotne i recipročne koeficijente smjera. Slijedi da je jednadžba traženog pravca $y = \frac{1}{3}x$.

Pogledajmo još pravce koji su paralelni s koordinatnim osima.
Za $a = 0$ funkcija poprima oblik $f(x) = b$, gdje je $b \in \mathbf{R}$. Nazivamo je **konstantna funkcija**. Njezin graf je pravac jednadžbe $y = b$.

konstantna funkcija

Primjer 3. Nacrtajmo graf funkcije:

a) $f(x)=3$,

b) $f(x)=-2$.

Grafovi zadanih funkcija su pravci jednadžba $y=3$ i $y=-2$. Odredimo neke njihove točke i nacrtajmo ih:

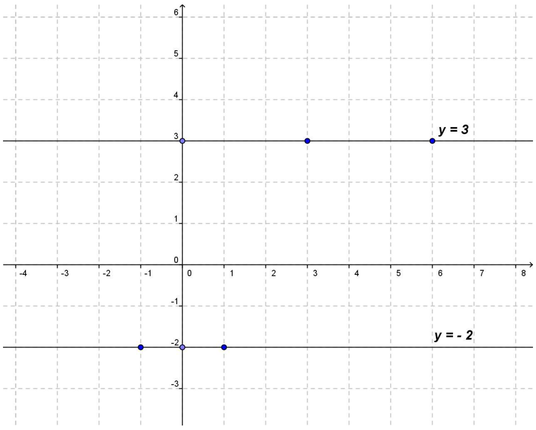
a)

x	0	3	6
$y=3$	3	3	3

b)

x	0	1	-1
$y=-2$	-2	-2	-2

Druga koordinata svih točaka pravca $y=3$ jednaka je 3, a pravca $y=-2$ jednaka je -2.

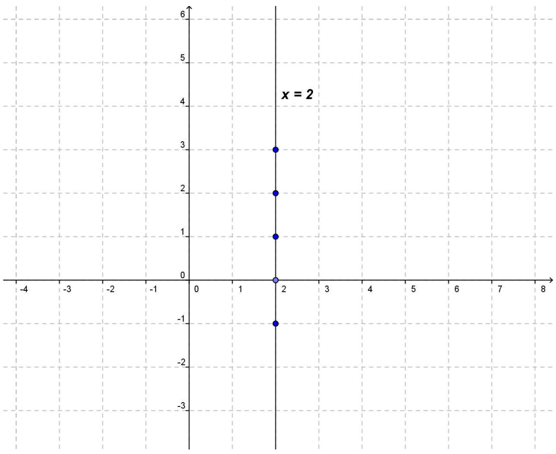


Zapamtimo: graf funkcije $f(x)=b$ je pravac $y=b$ koji je paralelan s x-osi i koji prolazi točkom $(0,b)$.

pravac paralelan s x osi

Primjer 4. U koordinatnom sustavu prikažimo sada skup svih točaka kojima je prva koordinata jednaka 2.

Neke od tih točaka su $(2,0)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(2,-1)$. Pogledajmo prikaz u koordinatnoj ravnini.



Vidimo da je traženi skup točaka pravac paralelan s y-osi. Kažemo da je $x=2$ jednadžba tog pravca.

Općenito: pravac koji je paralelan s y-osi i prolazi točkom $(c,0)$ ima jednadžbu $x=c$, gdje je $c\in\mathbf{R}$.

pravac paralelan s y osi

5.3. SUSTAV LINEARNIH JEDNADŽBI

Sustav dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama je sustav oblika

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases},$$

gdje su a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 i c_2 realni brojevi, a x i y realni brojeve koje trebamo odrediti, tj. nepoznate veličine ili **nepoznanice**. Brojeve a_1, b_1, a_2 i b_2 nazivamo **koeficijentima uz nepoznanice**, a brojeve c_1 i c_2 nazivamo **slobodnim koeficijentima**.

sustav linearnih jednadžbi

Rješenje sustava je svaki par realnih brojeva koji uvršten umjesto x i y u obje jednadžbe dovodi do istinitih brojčanih jednakosti.

Kod sustava dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama mogu nastupiti sljedeća tri slučaja:

1. sustav ima točno jedno rješenje,
2. sustav ima beskonačno mnogo rješenja,
3. sustav nema rješenja.

Više je metoda rješavanja sustava dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama, a ovdje upoznajemo sljedeće:

1. **metoda supstitucije**,
2. **metoda suprotnih koeficijenata**,
3. **grafička metoda**.

metode rješavanje sustava

Metoda supstitucije

Metoda se temelji na tome da se iz jedne od jednadžbi jedna od nepoznanica izrazi pomoću druge, a zatim se uvrsti (supstituira) u drugu jednadžbu.

metoda supstitucije

Primjer 1. Riješimo sustav jednadžbi: $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ 3x + 5y = 43 \end{cases}$.

Iz prve jednadžbe izrazimo $x = 2y + 7$ i uvrstimo u drugu jednadžbu:

$$3(2y + 7) + 5y = 43.$$

Dobivamo $y = 2$.
Uvrštavanjem u jednadžbu $x = 2y + 7$ dobijemo:

$$x = 2 \cdot 2 + 7 = 11$$

Sustav ima jedinstveno rješenje $x = 11$ i $y = 2$, što zapisujemo kao uređen par $(11, 2)$.

Primjer 2. Riješimo sustav jednadžbi: $\begin{cases} 4x - y = 7 \\ -8x + 2y = -13 \end{cases}$.

Iz prve jednadžbe dobijemo da je $y = 4x - 7$. Uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobijemo:

$$-8x + 2(4x - 7) = -13$$

iz čega slijedi:

$$0 \cdot x = 1$$

Budući da ne postoji realni broj x koji ispunjava dobivenu jednadžbu, zaključujemo da zadani sustav nema rješenja.

Za sustav koji **nema rješenja** kaže se i **nemoguć sustav**.

nemoguć sustav

Primjer 3. Riješimo sustav jednadžbi: $\begin{cases} 4x-3y=12 \\ -12x+9y=-36 \end{cases}$.

Iz prve jednadžbe dobijemo da je $y=\frac{4}{3}x-4$. Uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobijemo:

$$-12x+9\left(\frac{4}{3}x-4\right)=-36$$

iz čega slijedi:

$$0\cdot x=0$$

Dobivena jednadžba ispunjena je za sve realne brojeve x. Zato zadani sustav ima beskonačno mnogo rješenja.

Za sustav koji ima **beskonačno mnogo rješenja** kaže se i **neodređen sustav**.

neodređen sustav

Metoda suprotnih koeficijenata

Metoda se sastoji u tome da uz istu nepoznanicu u jednadžbama sustava imamo suprotne koeficijente što postižemo množenjem jedne (ili obje jednadžbe)nekim pogodnim brojem. Zatim se jednadžbe zbroje, a pri zbrajanju jednadžbi jedna se nepoznanica poništi.

metoda suprotnih koeficijenata

Primjer 1. Riješimo sustav jednadžbi: $\begin{cases} 3x+2y=12 \\ 2x-y=1 \end{cases}$.

Pomnožimo li drugu jednadžbu s 2 dobijemo sustav:

$$\begin{cases} 3x+2y=12 \\ 4x-2y=2 \end{cases}.$$

Zbrajanjem jednadžbi dobijemo:

$$7x=14,$$

odnosno $x=2$.

Uvrštavanjem u drugu jednadžbu zadanog sustava dobijemo da je $y=3$.

Primjer 2. Riješimo sustav jednadžbi: $\begin{cases} \frac{4x-y-12}{5}+\frac{x-2y+3}{15}=0 \\ \frac{5x-y-9}{12}-\frac{4x-y-13}{9}=1 \end{cases}$.

Jednadžbe sustava najprije moramo pojednostaviti, tj. srediti sustav.
Množenjem prve jednadžbe s 15, a druge s 36 dobijemo:

$$\begin{cases} 3(4x-y-12)+x-2y+3=0 \\ 3(5x-y-9)-4(4x-y-13)=36 \end{cases},$$

odnosno sustav:

$$\begin{cases} 12x-3y-36+x-2y+3=0 \\ 15x-3y-27-16x+4y+52=36 \end{cases},$$

tj:

$$\begin{cases} 13x-5y=33 \\ -x+y=11 \end{cases}.$$

Množenjem druge jednadžbe s 5 dobijemo sustav:

$$\begin{cases} 13x-5y=33 \\ -5x+5y=55 \end{cases}$$

Zbrajanjem jednadžbi imamo:

$$8x=88,$$

pa je $x=11$.
Uvrštavanjem u drugu jednadžbu zadanog sustava dobijemo da je $y=22$.

Grafička metoda rješavanja sustava

grafička metoda rješavanja sustava

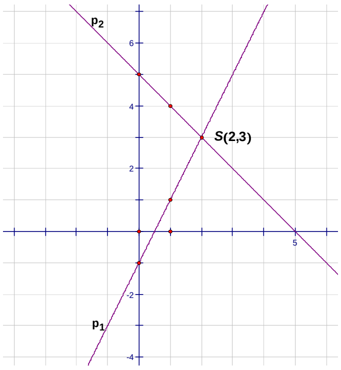
Grafičko rješavanje sustava dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama temelji se na predočavanju jednadžbi sustava u koordinatnoj ravnini.

Primjer 1. Riješimo sustav: $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+y=5 \end{cases}.$

Svaka jednadžba sustava predstavlja pravac u koordinatnoj ravnini. Zapišimo njihove jednadžbe u eksplicitnom obliku i nacrtajmo ih u istom koordinatnom sustavu: $p_1 \ldots y=2x-1$ i $p_2 \ldots y=-x+5$.

x	0	1	2
$y=2x-1$	-1	1	3

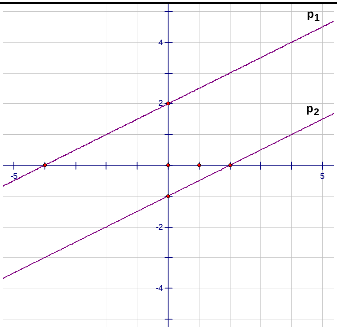
x	0	1	2
$y=-x+5$	5	4	3



Sjecište zadanih pravaca je točka S čije je koordinate moguće pročitati iz koordinatnog sustava, $S(2,3)$.
Pravci imaju jednu točku zajedničku pa zaključujemo da sustav ima jedinstveno rješenje $x=2$ i $y=3$.

Primjer 2. Riješimo sustav: $\begin{cases} x-2y=-4 \\ x-2y=2 \end{cases}.$

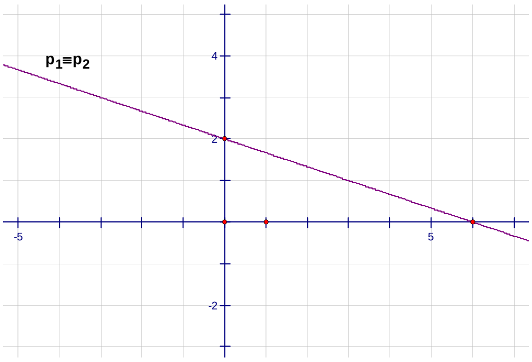
Zapišimo jednadžbe pravac u eksplicitnom obliku i nacrtajmo ih u istom koordinatnom sustavu: $p_1 \ldots y=\frac{1}{2}x+2$ i $p_2 \ldots y=\frac{1}{2}x-1$.



Uočimo da zadani pravci imaju jednake koeficijente smjera. Oni su paralelni, tj. nemaju zajedničkih točaka. Zaključujemo da sustav nema rješenja.

Primjer 3. Riješimo sustav: $\begin{cases} x+3y-6=0 \\ 2x+6y-12=0 \end{cases}$.

Zapišimo jednadžbe pravac u eksplicitnom obliku i nacrtajmo ih u istom koordinatnom sustavu: $p_1 \ldots y=-\frac{1}{3}x+2$ i $p_2 \ldots y=-\frac{1}{3}x+2$.
Jednadžbama sustava zadan je isti pravac.



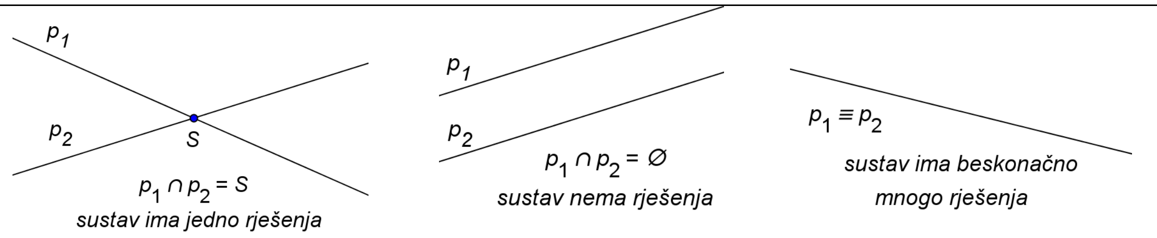
Zadani pravci se podudaraju, tj. sve točke su im zajedničke. Zaključujemo da sustav ima beskonačno mnogo rješenja.

5.4. SJECIŠTE DVAJU PRAVACA

Dva pravca u ravnini:
- imaju jednu zajedničku točku: (kažemo da se sijeku u jednoj točki $p_1 \cap p_2 = \{S\}$),
- nemaju zajedničkih točaka: (kažemo da su paralelni, $p_1 \parallel p_2$, $p_1 \cap p_2 = \emptyset$),
- imaju sve točke zajedničke (kažemo da se podudaraju $p_1 \equiv p_2$).

međusobni položaj dvaju pravaca

Međusobni položaj dvaju pravaca određujemo:
- grafičkom metodom (crtamo pravce u koordinatnom sustavu i nalazimo broj njihovih zajedničkih točaka),
- algebarskom ili računskom metodom (rješavamo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice koji čine jednadžbe zadanih pravaca $\begin{cases} p_1 \ldots A_1x+B_1y+C_1=0 \\ p_2 \ldots A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$, a broj rješenja sustava odgovara broju njihovih zajedničkih točaka).



sjecište pravaca

Želimo li odrediti presječnu točku dvaju pravaca (sjecište pravaca), tražimo uređeni par (x, y) koji zadovoljava jednadžbe obaju pravaca. Odredit ćemo ju tako da riješimo sustav koji određuju jednadžbe tih pravaca

$$\begin{cases} p_1 \ldots A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ p_2 \ldots A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}.$$

Primjer 1. Odredimo točku u kojoj se sijeku pravci $3x + 2y + 2 = 0$ i $2x - 3y + 10 = 0$.

Rješavamo sustav $\begin{cases} 3x + 2y + 2 = 0 \\ 2x - 3y + 10 = 0 \end{cases}$ po volji odabranom metodom. Neka je to npr. metoda suprotnih koeficijenata. Množenjem prve jednadžbe s 2, a druge s 3 dobivamo:

$$\begin{cases} 9x + 6y + 6 = 0 \\ 4x - 6y + 20 = 0 \end{cases}$$

Zbrajanjem jednadžbi dobivamo $13x + 26 = 0$ pa je . Dalje, dobivamo $y = 2$. Pravci se sijeku u točki $S(-2, 2)$.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. U istom koordinatnom sustavu nacrtajte pravce zadane jednadžbama:
   a) $y = -\frac{2}{3}x$,
   b) $y = -\frac{2}{3}x + 3$,
   c) $y = \frac{3}{2}x - 2$,
   d) $y = x$,
   e) $x = 4$,
   f) $y = -1$.

2. Zadana je pravac $y = \frac{2}{5}x - 4$.
   a) Nacrtajte zadani pravac.
   b) Da li je zadani pravac raste ili pada?
   c) Napišite jednadžbe bar dvaju pravaca koji su paralelni sa zadanim pravcem.
   d) Napišite jednadžbu pravca koji prolazi ishodištem i okomit je na zadani pravac.
   e) Odredite točku zadanog pravca kojoj je apscisa -15.
   f) U kojoj točki zadani pravac siječe x-os, a u kojoj siječe y-os?

3. Kolika je površina trokuta kojemu stranice leže na pravcima $x=-2$, $y=3$ i $x-2y+2=0$? Nacrtajte taj trokut u koordinatnom sustavu.

4. Metodom supstitucije riješite sustav jednadžbi:

a) $\begin{cases} 2x-5y=7 \\ -x+3y=-5 \end{cases}$,

b) $\begin{cases} 5\cdot(x-1)-4\cdot(x+y)=0 \\ 4x-3\cdot(y-2)=0 \end{cases}$.

5. Metodom suprotnih koeficijenata riješite sustav jednadžbi:

a) $\begin{cases} \dfrac{4x-y-12}{5}+\dfrac{x-2y+3}{15}=0 \\ \dfrac{5x-y-9}{12}-\dfrac{4x-y-13}{9}=1 \end{cases}$,

b) $\begin{cases} \dfrac{2x+y-6}{3}-\dfrac{x+3y+5}{2}=\dfrac{5x-4y-1}{2} \\ \dfrac{7x+2y+9}{6}-\dfrac{3x-y-1}{2}-\dfrac{x+y+11}{3}=0 \end{cases}$.

6. Grafičkom metodom riješite sustav jednadžbi:

a) $\begin{cases} 3x+y=-9 \\ x-y=-7 \end{cases}$,

b) $\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ -4x+2y-2=0 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} x+3y-6=0 \\ x+3y+9=0 \end{cases}$.

6. KORIJENI I POTENCIJE S RACIONALNIM EKSPONENTOM

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:

1. *Kako definiramo drugi korijen, a kako korijene višeg reda?*
2. *Gdje koristimo korjenovanje? Koja su pravila računanja s korijenima?*
3. *Kako rješavano iracionalne jednadžbe?*

6.1. KORIJENI

Drugi korijen

U ranijim odjeljcima upoznali smo postupak kvadriranja racionalnih brojeva. Ovdje ćemo razmatrati postupak obrnut kvadriranju koji se naziva korjenovanje.

Neka je $a\geq 0$. Drugi korijen iz a je broj $\sqrt{a}$ sa svojstvima:

1. $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$,
2. $\sqrt{a}\geq 0$.

drugi korijen

Znak $\sqrt{\ }$ označuje **drugi korijen.** Drugi korijen se još naziva i **kvadratni korijen**.

Svojstvo 1. govori da je korjenovanje obrnuto (inverzno) kvadriranju, a svojstvo 2. isključuje negativan broj kojemu je kvadrat broj a.

Tako je $2^2 = 4$ i $(-2)^2 = 4$. Zato brojevi 2 i -2 ispunjavaju svojstvo 1. Međutim, $\sqrt{4} = 2$ jer je prema svojstvu 2. $\sqrt{4} \geq 0$. Dakle $\sqrt{4} \neq -2$ iako je $(-2)^2 = 4$.

Slično je i:

$\sqrt{16} = 4$ jer je $4^2 = 16$,
$\sqrt{1.44} = 1.2$ jer je $1.2^2 = 1.44$,
$\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$ jer je $\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$.

Korijeni višeg reda

Slično kao drugi, definiramo četvrti korijen iz broja $a \geq 0$:

Neka je $a \geq 0$. Četvrti korijen iz a je broj $\sqrt[4]{a}$ sa svojstvima:

1. $\left(\sqrt[4]{a}\right)^4 = a$,
2. $\sqrt[4]{a} \geq 0$.

Tako je $\sqrt[4]{16} = 2$ jer je $2^4 = 16$ i $2 > 0$. Iako je $(-2)^4 = 16$, broj -2 nije četvrti korijen iz 16.

Na isti način definiramo ostale parne korijene. Sjetimo se da parne prirodne brojeve zapisujemo u obliku $2n$, $n \in \mathbf{N}$.

Neka je $a \geq 0$. $2n$-ti korijen iz a je broj $\sqrt[2n]{a}$ sa svojstvima:

1. $\left(\sqrt[2n]{a}\right)^{2n} = a$,
2. $\sqrt[2n]{a} \geq 0$.

parni korijeni

U nepranih korijena situacija je nešto jednostavnija. Tu se ne moramo ograničavati samo na pozitivne brojeve a i nulu. Tako je:

$$2^3 = 8, \text{ a } (-2)^3 = -8,$$

dakle

$$\sqrt[3]{8} = 2, \text{ a } \sqrt[3]{-8} = -2.$$

Općenito, neka je a bilo koji broj.

Treći korijen iz a je broj $\sqrt[3]{a}$ sa svojstvom $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$.

Na isti način definiramo ostale neparne korijene. Sjetimo se da neparne prirodne brojeve zapisujemo u obliku $2n-1$, $n \in \mathbf{N}$.

Neka je a bilo koji broj. $2n-1$ korijen iz a je broj $\sqrt[2n-1]{a}$ sa svojstvom $\left(\sqrt[2n-1]{a}\right)^{2n-1}=a$.

neparni korijeni

Operacija koja broju a pridružuje broj $\sqrt[n]{a}$ naziva se **korjenovanje**. U izrazu $\sqrt[n]{a}$ broj a se zove **baza (osnova) korijena** ili **potkorijenska veličina**, a broj n **korijenski eksponent**.

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $-\sqrt[105]{-1}+\sqrt[106]{1}+\sqrt[107]{-1}=-(-1)+1+(-1)=1$,

b) $-\sqrt[3]{-8}-5\sqrt[3]{64}+2\sqrt[5]{32}=-(-2)-5\cdot 4+2\cdot 2=2-20+4=-14$.

6.2. RAČUNANJE S KORIJENIMA

Zbrajamo i oduzimamo jedino korijene jednakih potkorijenskih veličina i to kao u primjeru:

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $3\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{2}=7\sqrt[3]{2}$,

b) $4\sqrt{a}-7\sqrt{a}-\sqrt{a}=-4\sqrt{a}$,

c) $5\sqrt[5]{5}-17\sqrt{13}-\left(\sqrt[5]{5}-4\sqrt{13}+4\sqrt[5]{5}\right)=5\sqrt[5]{5}-17\sqrt{13}-\sqrt[5]{5}+4\sqrt{13}+4\sqrt[5]{5}=$
$=-13\sqrt{13}$.

Za operacije s korijenima vrijede svojstva:

1. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$,
2. $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\sqrt[n]{a:b}$,
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$,
4. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$,
5. $\sqrt[mn]{a^m}=\sqrt[n]{a}$.

pravila za računanje s korijenima

Primjer 2. Izračunajmo:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}=\sqrt{2\cdot 18}=\sqrt{36}=6$,

b) $\sqrt{0.3}\cdot\sqrt{2.7}=\sqrt{0.3\cdot 2.7}=\sqrt{0.81}=0.9$,

c) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}\cdot\sqrt{20}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}\cdot\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{5\cdot 20}\cdot\sqrt{27\cdot 3}=\sqrt{100}\cdot\sqrt{81}=$
$=10\cdot 9=90$,

d) $\sqrt{121\cdot 81}=\sqrt{121}\cdot\sqrt{81}=11\cdot 9=99$,

e) $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{48}{3}}=\sqrt{16}=4$,

f) $\sqrt{\dfrac{11}{48}}:\sqrt{\dfrac{44}{75}}=\sqrt{\dfrac{11}{48}:\dfrac{44}{75}}=\sqrt{\dfrac{11}{48}\cdot\dfrac{75}{44}}=\sqrt{\dfrac{25}{16\cdot 4}}=\dfrac{5}{4\cdot 2}=\dfrac{5}{8}$,

g) $\sqrt[4]{5}:\sqrt[4]{80}=\sqrt[4]{5:80}=\sqrt[4]{\frac{5}{80}}=\sqrt[4]{\frac{1}{16}}=\frac{1}{2}$,

h) $\frac{\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{-162}}{\sqrt[3]{42}}=\sqrt[3]{\frac{7\cdot(-162)}{42}}=\sqrt[3]{-27}=-3$,

i) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{3}}=\sqrt[15]{3}$,

j) $\sqrt[7]{\sqrt[5]{\sqrt{a}}}=\sqrt[70]{a}$,

k) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^4=\sqrt[3]{3^4}=\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{27\cdot 3}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}$.

l) $\sqrt[15]{\frac{x^6y^6}{z^2}}:\sqrt[30]{\frac{x^7y^7}{z^9}}=\sqrt[30]{\left(\frac{x^6y^6}{z^2}\right)^2:\frac{x^7y^7}{z^9}}=\sqrt[30]{\frac{x^{12}y^{12}}{z^4}\cdot\frac{z^9}{x^7y^7}}=\sqrt[30]{x^5y^5z^5}=$

$=\sqrt[30]{(xyz)^5}=\sqrt[6]{xyz}$.

Kad pod drugim korijenom imamo broj koji se može rastaviti na umnožak dvaju brojeva od kojih se jedan može zapisati kao kvadrat, često postupamo kao u primjeru:

$$\sqrt{72}=\sqrt{36\cdot 2}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{2}=6\sqrt{2}.$$

Taj postupak nazivamo **djelomičnim korjenovanjem**.
Analogno postupamo kada je riječ o korijenima višeg reda.

djelomično korjenovanje

Primjer 3. Djelomično korjenujmo brojeve:

a) $\sqrt{500}=\sqrt{100\cdot 5}=\sqrt{100}\cdot\sqrt{5}=10\sqrt{5}$,

b) $\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{8\cdot 2}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}$.

Primjer 4. Izračunajmo:

a) $3\sqrt{8}+\sqrt{98}=3\sqrt{4\cdot 2}+\sqrt{49\cdot 2}=3\cdot 2\sqrt{2}+7\sqrt{2}=6\sqrt{2}+7\sqrt{2}=13\sqrt{2}$,

b) $5\sqrt{40}-6\sqrt{90}+3\sqrt{10}=5\sqrt{4\cdot 10}-6\sqrt{9\cdot 10}+3\sqrt{10}=5\cdot 2\sqrt{10}-6\cdot 3\sqrt{10}+3\sqrt{10}=$

$=10\sqrt{10}-18\sqrt{10}+3\sqrt{10}=-5\sqrt{10}$,

c) $-\frac{2}{5}\sqrt[3]{250}+\frac{1}{2}\sqrt{28}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{16}-\frac{1}{3}\sqrt{63}=$

$=-\frac{2}{5}\sqrt[3]{125\cdot 2}+\frac{1}{2}\sqrt{4\cdot 7}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{8\cdot 2}-\frac{1}{3}\sqrt{9\cdot 7}=$

$=-\frac{2}{5}\cdot 5\sqrt[3]{2}+\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{7}+\frac{3}{2}\cdot 2\sqrt[3]{2}-\frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{7}=$

$=-2\sqrt[3]{2}+\sqrt{7}+3\sqrt[3]{2}-\sqrt{7}=\sqrt[3]{2}.$

Postupak obrnut od djelomičnog korjenovanja je unošenje pod znak korijena.

Primjer 5. Unesimo pod znak korijena:

a) $2\sqrt{3}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{12}$,

b) $xy^2\sqrt{xy}=\sqrt{x^2y^2xy}=\sqrt{x^3y^3}$,

c) $2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2^3\cdot 5}=\sqrt[3]{8\cdot 5}=\sqrt[3]{40}$,

d) $\sqrt[6]{a\cdot\sqrt[5]{a^{19}}}\cdot\sqrt[5]{a^4\cdot\sqrt{a^{14}}}=\sqrt[6]{\sqrt[5]{a^5a^{19}}}\cdot\sqrt[5]{\sqrt{a^8a^{14}}}=\sqrt[30]{a^{24}}\cdot\sqrt[10]{a^{22}}=$
$=\sqrt[10]{a^8}\cdot\sqrt[10]{a^{22}}=\sqrt[10]{a^{30}}=a^3.$

6.3. RACIONALIZACIJA NAZIVNIKA

Korijeni se često pojavljuju u nazivnicima razlomaka. Dijeljenje korijenom je neprikladno jer korijen obično zamjenjujemo približnim vrijednostima s određenim brojem decimala. Tako je i postupak dijeljenja složen, npr:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\approx\frac{1}{1.4142}\approx 0.7071.$$

Radi lakšeg računanja taj je razlomak potrebno preurediti tako da u nazivniku nema korijena. To se postiže množenjem brojnika i nazivnika prikladno odabranim brojem, npr:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx\frac{1.4142}{2}=0.7071.$$

Postupak uklanjanja korijena iz nazivnika nazivamo **racionalizacija**.

racionalizacija nazivnika

Primjer 1. Racionalizirajmo nazivnik:

a) $\frac{55}{\sqrt{11}}=\frac{55}{\sqrt{11}}\cdot\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}}=\frac{55\sqrt{11}}{11}=5\sqrt{11}$,

b) $\frac{5}{2\sqrt{5}}=\frac{5}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{2\cdot 5}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,

c) $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}=\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\cdot\frac{\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^4}}=\frac{\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^5}}=\frac{\sqrt[5]{16}}{2}$,

d) $\frac{ab^7}{\sqrt[7]{a^5b^3}}=\frac{ab^7}{\sqrt[7]{a^5b^3}}\cdot\frac{\sqrt[7]{a^2b^4}}{\sqrt[7]{a^2b^4}}=\frac{ab^7\sqrt[7]{a^2b^4}}{\sqrt[7]{a^7b^7}}=b^6\sqrt[7]{a^2b^4}$.

U idućem primjeru pri racionalizaciji ćemo se poslužiti formulom za razliku kvadrata:

Primjer 2. Racionalizirajmo nazivnik:

a) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}=\frac{1}{1+\sqrt{3}}\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=\frac{1-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=\frac{1-\sqrt{3}}{1^2-\sqrt{3}^2}=\frac{1-\sqrt{3}}{1-3}=$
$=\frac{1-\sqrt{3}}{-2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$,

b) $\frac{15}{\sqrt{17}-\sqrt{2}}=\frac{15}{\sqrt{17}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{17}+\sqrt{2}}{\sqrt{17}+\sqrt{2}}=\frac{15(\sqrt{17}+\sqrt{2})}{(\sqrt{17}-\sqrt{2})(\sqrt{17}+\sqrt{2})}=\frac{15(\sqrt{17}+\sqrt{2})}{\sqrt{17}^2-\sqrt{2}^2}=$
$=\frac{15(\sqrt{17}+\sqrt{2})}{15}=\sqrt{17}+\sqrt{2}$.

6.4. POTENCIJE S RACIONALNIM EKSPONENTIMA

Naučili smo što su potencije s cjelobrojnim eksponentom. Ovdje ćemo vidjeti da se korijeni mogu pisati u obliku potencije s racionalnim eksponentom i da takve potencije imaju slična svojstva onima s cjelobrojnim eksponentom.

Neka je racionalan broj zapisan u obliku razlomka $\frac{m}{n}$, gdje je $m \in \mathbf{Z}$, a $n \in \mathbf{N}$.

Tada vrijedi:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

potencije s racionalnim eksponentima

Primjer 1. Zapišimo u obliku korijena s racionalnim eksponentom:

a) $\sqrt[3]{a^4} = a^{\frac{4}{3}}$,

b) $\sqrt[5]{a^{-2}} = a^{-\frac{2}{5}}$,

c) $\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$.

Primjer 2. Napišimo u obliku korijena:

a) $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$,

b) $a^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{a^3}$,

c) $a^{-\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{a^{-4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{a^4}}$.

Primjer 3. Izračunajmo:

a) $\left(\frac{625}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{625}{16}} = \frac{5}{2}$,

b) $\left(-\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$,

c) $(-81)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-81}$ nije definirano jer parni korijen nije definiran za $a < 0$.

Već smo napomenuli da je važnost potencija ponajviše u njihovim svojstvima. S potencijama s racionalnim eksponentom računamo slično kao s potencijama s cjelobrojnim eksponentom. Sjetimo se tih pravila.

Neka su r_1 i r_2 dva racionalna broja. Tada vrijedi:

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2},$$
$$a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1 - r_2},$$
$$\left(a^{r_1}\right)^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}.$$

Primjer 4. Izračunajmo:

a) $\left(a^{-\frac{4}{5}}\right)^{-\frac{5}{3}}\cdot\sqrt[3]{a^{-10}}=a^{-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)}\cdot a^{-\frac{10}{3}}=a^{\frac{4}{3}}\cdot a^{-\frac{10}{3}}=a^{\frac{4}{3}+\left(-\frac{10}{3}\right)}=a^{-\frac{6}{3}}=a^{-2}=\frac{1}{a^2}$,

b) $\left[\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-2}-3\cdot 81^{-0.25}=\left(\sqrt[3]{\frac{1}{64}}\right)^{-2}-3\cdot\sqrt[4]{81^{-1}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}-3\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{81}}=$

$=4^2-3\cdot\frac{1}{3}=16-1=15$,

c) $\left\{\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2:25^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}\cdot 125\right\}^{\frac{1}{4}}=\left\{\left[\left(5^{-1}\right)^2:\left(5^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}\cdot 5^3\right\}^{\frac{1}{4}}=$

$=\left\{\left[5^{-2}:5^{-1}\right]^{-1}\cdot 5^3\right\}^{\frac{1}{4}}=\left\{\left[5^{-1}\right]^{-1}\cdot 5^3\right\}^{\frac{1}{4}}=\left\{5\cdot 5^3\right\}^{\frac{1}{4}}=\left(5^4\right)^{\frac{1}{4}}=5$.

6.5. IRACIONALNE JEDNADŽBE

Iracionalne jednadžbe su jednadžbe u kojima se nepoznanica nalazi pod znakom korijena. Rješavamo ih kvadriranjem kojim je sačuvano svako rješenje polazne jednadžbe. Kvadriranjem, međutim, možemo doći do stranog rješenja koje nije rješenje polazne jednadžbe. Zato sva rješenja dobivena nakon kvadriranja trebamo uvrstiti u polaznu jednadžbu da bismo provjerili jesu li rješenja polazne jednadžbe ili su strana rješenja.

iracionalne jednadžbe

Primjer 1. Riješimo jednadžbe:

a) $\sqrt{2x-3}=5$

Kvadriranjem lijeve i desne strane jednadžbe dobivamo:

$$2x-3=25$$

pa je $x=14$.

Potrebno je napraviti provjeru dobivenog rješenja. Uvrštavanjem dobivenog rješenja u polaznu jednadžbu dobivamo: $\sqrt{2\cdot 14-3}=5$, odnosno $5=5$ pa je dobiveno rješenje rješenje zadane jednadžbe.

b) $(6x+8)^{\frac{1}{4}}+2=0$

Jednadžbu možemo zapisati u obliku $\sqrt[4]{6x+8}=-2$. Sada vidimo da zadana jednadžba nema rješenja jer je parni korijen, po definiciji, nenegativan broj.

c) $\sqrt{8+x^2}=4+x$

Kvadriranjem lijeve i desne strane jednadžbe dobivamo:

$$8+x^2=16+8x+x^2,$$

iz čega je $x=-1$.

Uvrštavanjem dobivenog rješenja u polaznu jednadžbu dobivamo:

$\sqrt{8+(-1)^2}=4+(-1)$, odnosno $3=3$. Dobiveno rješenje je rješenje zadane jednadžbe.

d) $\sqrt{x+11}-\sqrt{x-4}=3$.

Na lijevoj strani jednadžbe ostavimo samo jedan korijen:

$$\sqrt{x+11}=3+\sqrt{x-4}.$$

Sada kvadriramo lijevu i desnu stranu jednadžbe:

$$x+11=9+6\sqrt{x-4}+x-4.$$

Sređivanjem dobivamo:

$$6\sqrt{x-4}=6,$$

odnosno

$$\sqrt{x-4}=1.$$

Još jednom kvadriramo jednadžbu:

$$x-4=1$$

pa je $x=5$.

Uvrštavanjem dobivenog rješenja u polaznu jednadžbu dobivamo: $\sqrt{5+11}-\sqrt{5-4}=3$, odnosno $3=3$. Dobiveno rješenje je rješenje zadane jednadžbe.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Izračunajte:

a) $8\sqrt{7}-4\sqrt{2}-\left(7\sqrt{2}-2\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)=$

b) $5\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{80}+\frac{1}{5}\sqrt{125}=$

c) $\sqrt{\frac{18}{3}}:\sqrt{\frac{2}{75}}=$

d) $\sqrt{14.5^2-10.5^2}=$

e) $2\sqrt{20}-\frac{3}{5}\sqrt{45}+\sqrt[4]{32}+\frac{1}{2}\sqrt[4]{162}-\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt[4]{2}=$

f) $\frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{3}}=$

g) $\sqrt{4-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{5}}=$

h) $\sqrt{1\frac{9}{16}}-\sqrt{2\frac{1}{4}}+\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}=$

i) $3\sqrt[8]{a^4}-\sqrt[14]{a^7}-5\sqrt[6]{a^3}=$

j) $\sqrt[4]{\frac{x^5y^5}{z}}:\sqrt[16]{\frac{x^4y^4}{z^{20}}}=$

k) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{a^3}}\cdot\sqrt[5]{a^2\cdot\sqrt{a^8}}=$

2. Racionalizirajte nazivnike:

a) $\frac{36}{\sqrt{3}}=$

b) $\frac{12}{\sqrt{8}+\sqrt{2}}=$

c) $\frac{1}{\sqrt[7]{9^5}}=$

d) $\dfrac{a^4 b}{\sqrt[11]{a^6 b^8}} =$

3. Napišite u obliku potencije s racionalnim eksponentom:
   a) $\sqrt{a^{-9}} =$
   b) $\sqrt[7]{b^4} =$
4. Napišite u obliku korijena:
   a) $a^{-\frac{7}{8}} =$
   b) $b^{\frac{11}{2}} =$
5. Izračunajte:
   a) $\left(-\dfrac{1}{125}\right)^{\frac{1}{3}} =$
   b) $\left(a^{-\frac{2}{5}}\right)^{-\frac{5}{7}} \cdot \sqrt[7]{a^5} =$
   c) $16^{-\frac{1}{2}} - 0.25^{1.5} =$
   d) $\dfrac{0.04^{\frac{1}{5}} \cdot 5^{-\frac{5}{2}}}{125^{-\frac{4}{3}}} =$
6. Riješi jednadžbe:
   a) $\sqrt{x^2 + 15} = x + 3$,
   b) $(3x+6)^{\frac{1}{4}} + 9 = 0$,
   c) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = 1$,
   d) $2\sqrt{2x+1} - 3 = 0$,
   e) $x - 2 = \sqrt{4 + 2x - x^2}$.

7. SUKLADNOST I SLIČNOST TROKUTA

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:
1. *Koji su poučci o sukladnosti trokuta?*
2. *Za koje dužine kažemo da su razmjerne? Kako glasi Talesov poučak o proporcionalnosti?*
3. *Koji su trokuti slični?*

7.1. SUKLADNOST DUŽINA, KUTOVA I TROKUTA

Kažemo da su dvije dužine sukladne ako su im duljine jednake. ***sukladnost dužina***

Činjenicu da su dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ sukladne zapisujemo $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Kažemo da su dva kuta sukladna ako su im mjere jednake. ***sukladnost kutova***

Ponovimo ovdje neka svojstva trokuta koja znamo od ranije:

– Zbroj mjera unutarnjih kutova trokuta je 180°, tj. $\alpha+\beta+\gamma=180°$.
– Zbroj duljina dviju stranica trokuta veći je od duljine treće stranice trokuta, tj.

$$a+b>c$$
$$a+c>b.$$
$$b+c>a$$

Svaka od navedenih nejednakosti naziva se **nejednakost trokuta**.
– Nasuprot dulje stranice u trokutu leži kut veće mjere i obrnuto, tj. ako je $a<b$ onda je $\alpha<\beta$ i ako je $\alpha<\beta$, onda je $a<b$.

svojstva trokuta

Kažemo da su dva trokuta sukladna ako su im sukladne odgovarajuće stranice i odgovarajući kutovi.

sukladnost trokuta

Iz definicije sukladnosti trokuta vidimo da je za njezino provjeravanje potrebno usklađivanje po šest elemenata trokuta. Taj postupak možemo skratiti. O tome govore **poučci o sukladnosti**:

1. Dva su trokuta sukladna ako su sukladna u dvjema stranicama i kutu između njih (S-K-S).
2. Dva su trokuta sukladna ako su sukladna u jednoj stranici i kutovima uz tu stranicu (K-S-K).
3. Dva su trokuta sukladna ako su sukladna u sve tri svoje stranice (S-S-S).
4. Dva su trokuta sukladna ako su sukladna u dvjema stranicama i kutu nasuprot dulje stranice (S-S-K$^{>}$).

poučci o sukladnosti

7.2. PROPORCIONALNOST (RAZMJERNOST) DUŽINA. TALESOV POUČAK

Omjer brojeva a i b je količnik $\frac{a}{b}$ brojeva a i b, tj. $\frac{a}{b}=a:b$.

omjer

Jednakost dvaju omjera $a:b=c:d$ nazivamo **razmjerom** ili **proporcijom** (čitamo a *prema* b *odnosi se kao* c *prema* d) .

razmjer (proporcija)

Iz kriterija jednakosti racionalnih brojeva: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ako i samo ako je $ad=bc$,

dobivamo:

$a:b=c:d$ ako i samo ako je $ad=bc$,

tj. produkt vanjskih članova razmjera jednak je produktu unutarnjih članova razmjera.

Ako taj jedan te isti omjer označimo slovom k, tj. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$, onda broj k nazivamo **koeficijent proporcionalnosti** (**razmjernosti**).

koeficijent razmjernosti

U istom omjeru može biti više veličina. Tada govorimo o produženom razmjeru:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=k.$$

To zapisujemo na različite načine, npr:

$$a_1:b_1=a_2:b_2=a_3:b_3,$$
$$a_1:a_2:a_3=b_1:b_2:b_3,$$
$$a_1=k\cdot b_1,\ a_2=k\cdot b_2,\ a_3=k\cdot b_3.$$

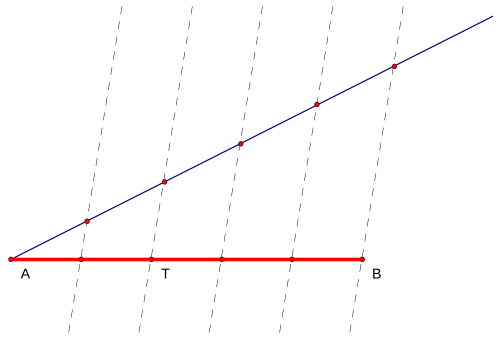
Omjeri i razmjeri mogu biti povezani i s dužinama.
Omjer dužina je omjer njihovih duljina izraženih u istoj mjernoj jedinici.

Kažemo da su dužine razmjerne ili proporcionalne ako su razmjerne njihove duljine.

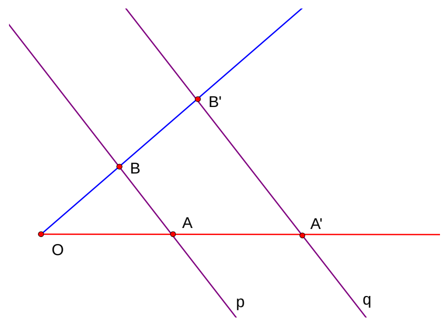
razmjernost dužina

Primjer 1. Odredimo omjer stranice i visine jednakostraničnog trokuta.
Duljina visine jednakostraničnog trokuta kojemu je stranica duljine a iznosi $v=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Sada je $a:v=a:\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{2a}{a\sqrt{3}}=2:\sqrt{3}$.

Primjer 2. Danu dužinu $\overline{AB}$ podijelimo točkom T u omjeru $2:3$.
Dužinu $\overline{AB}$ dijelimo na 5 jednakih dijelova. Tražena točka T je druga djelišna točka.



Pogledajmo sada kut s vrhom u točki O, kojemu su kraci presječeni paralelnim pravcima. Uočimo dužine $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$, $\overline{OB}$, $\overline{OB'}$, $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$.



Izmjerimo duljine istaknutih dužina, tj. $|OA|$, $|OA'|$, $|OB|$, $|OB'|$, $|AB|$ i $|A'B'|$ i odredimo omjere: $\frac{|OA'|}{|OA|}$, $\frac{|OB'|}{|OB|}$ i $\frac{|A'B'|}{|AB|}$.
Uočavamo da istaknute dužine nisu neovisne jedna o drugoj, nego da ih povezuje razmjer:

$$\frac{|OA'|}{|OA|}=\frac{|OB'|}{|OB|}=\frac{|A'B'|}{|AB|}.$$

Tvrdnju nazivamo **Talesov poučak o proporcionalnosti**.

Talesov poučak

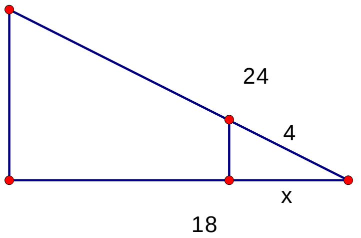
Paralelni pravci na kracima kuta odsijecaju proporcionalne dužine.

Tvrdnja Talesovog poučka vrijedi samo ako su kraci kuta presječeni paralelnim pravcima.

Vrijedi obrat: ako je $\frac{|OA'|}{|OA|}=\frac{|OB'|}{|OB|}$, onda je $AB \parallel A'B'$.

Primjer 2. Koristeći Talesov poučak izračunaj nepoznatu duljinu x:

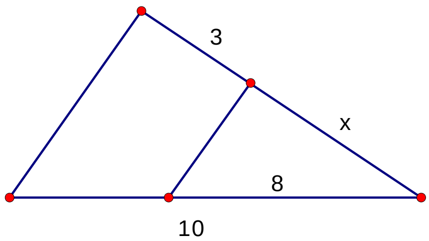
a)



Po Talesovom poučku je $\frac{18}{x}=\frac{24}{4}$

pa je $x=3$.

b)

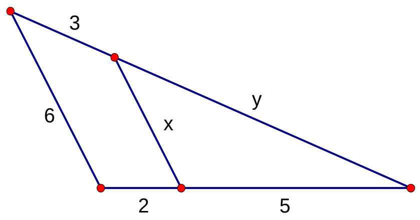


Po Talesovom poučku je

$\frac{10}{8}=\frac{3+x}{x}$, odnosno $10x=24+8x$

pa je $x=12$.

c)



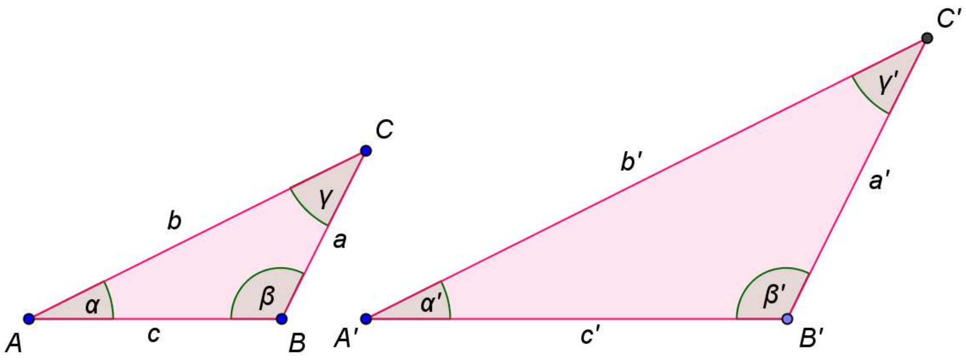
Dva puta primijenimo Talesov poučak. Iz $\frac{5+2}{5}=\frac{6}{x}$ dobivamo $x=\frac{30}{7}$, a iz $\frac{5+2}{5}=\frac{3+y}{y}$ slijedi da je $y=\frac{15}{2}$.

7.3. SLIČNOST TROKUTA

Kažemo da su dva trokuta **slična** ako su im kutovi sukladni i ako su im odgovarajuće stranice proporcionalne (razmjerne).

sličnost trokuta

Ako su trokuti ABC i $A'B'C'$ slični pišemo $ABC \sim A'B'C'$.



Trokuti na slici su slični jer su im odgovarajući kutovi sukladni i odgovarajuće stranice proporcionalne, tj. vrijedi:

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=k\,.$$

Broj k naziva se koeficijent sličnosti trokuta ABC i $A'B'C'$.

Lako se pokaže da je omjer opsega sličnih trokuta jednak omjeru odgovarajućih stranica trokuta:

$$\frac{o'}{o}=k\,.$$

Vrijedi i: odgovarajuće visine sličnih trokuta odnose se kao odgovarajuće stranice.
Za omjer površina sličnih trokuta vrijedi:

$$\frac{P'}{P}=k^2\,.$$

Primjer 1. Duljine stranica trokuta su 6 cm, 8 cm i 10 cm. Najdulja stranica njemu sličnog trokuta je 7 cm. Odredimo duljine preostalih stranica tog trokuta.

Zadano je $a=6$ cm, $b=8$ cm, $c=10$ cm, $c'=7$ cm. Najprije je $k=\frac{c'}{c}=\frac{7}{10}$, a zatim:

$a'=k\cdot a=\frac{7}{10}\cdot 6=\frac{21}{5}$ cm i $b'=k\cdot b=\frac{7}{10}\cdot 8=\frac{28}{5}$ cm.

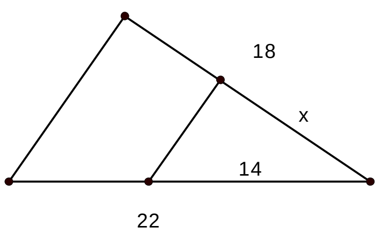
Primjer 2. Opsezi dvaju sličnih trokuta odnose se kao $5:6$. Duljina jedne stranice većeg trokuta je 20 cm. Duljina visine na tu stranicu je $\frac{36}{5}$ cm. Izračunaj površinu većeg trokuta te koristeći dobiveni rezultat, izračunaj površinu manjeg trokuta.

Površina većeg trokuta je $P=\frac{a\cdot v_a}{2}=\frac{20\cdot\frac{36}{5}}{2}=72$ cm^2. Koeficijent proporcionalnosti je $k=\frac{o'}{o}=\frac{5}{6}$. Sada je $P'=k^2\cdot P=\frac{25}{36}\cdot 72=50$ cm².

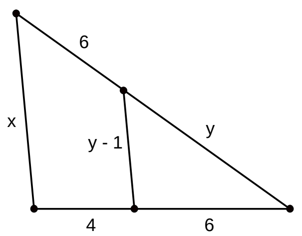
ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Izračunajte nepoznate elemente na slici:

a)



b)



2. Opsezi dvaju sličnih trokuta odnose se kao 11 : 7. Duljina jedne manjeg većeg trokuta je 98 cm. Odredite duljinu njoj odgovarajuće stranice manjeg trokuta.
3. Odredite duljine stranica a i a' dvaju sličnih trokuta ako je $O':O=2:5$ i $a-a'=18$.

4. Duljine odgovarajućih stranica dvaju sličnih trokuta su 10 dm i 9 dm. Površina većeg trokuta je 200 dm². Odredite površinu manjeg trokuta.
5. Površina jednog trokuta 25 puta je veća od površine sličnog mu trokuta. Koliki je opseg manjeg trokuta,ako je opseg većeg trokuta 125 cm?
6. Odredite duljine stranica a i a' dvaju sličnih trokuta ako je $P':P=9:16$ i $a'+a=140$.

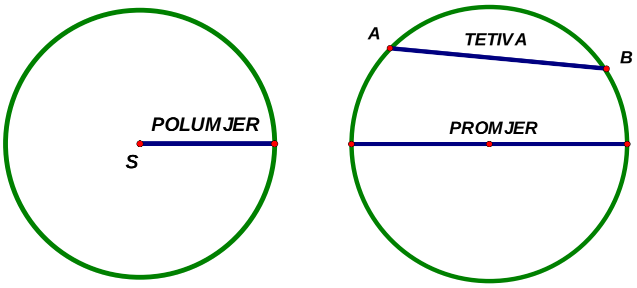
8. KRUŽNICA I KRUG

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:
1. *Što je krug, a što kružnica? Kako računamo opseg i površinu kruga?*
2. *Kako računamo duljinu kružnog luka, a kako površinu kružnog isječka?*
3. *Kako glasi poučak o obodnom i središnjem kutu?*

8.1. OPSEG I POVRŠINA KRUGA

Kružnica je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od zadane točke S. Točku S nazivamo **središte** kružnice. ***kružnica***

Krug je dio ravnine omeđen kružnicom. ***krug***

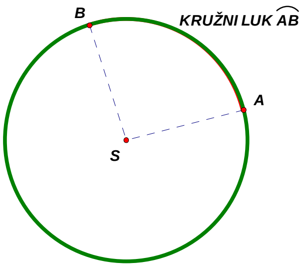


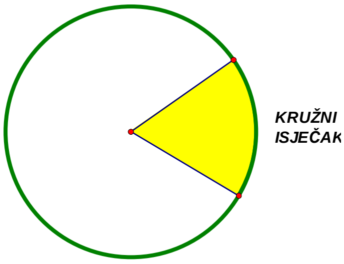
Polumjer (radijus) kružnice je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom na kružnici. Duljinu polumjera označavamo s r. ***polumjer***

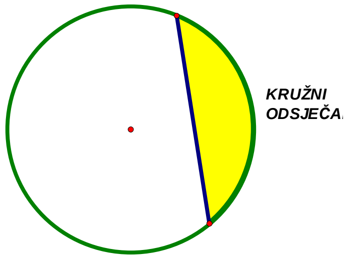
Tetiva kružnice je dužina koja spaja bilo koje dvije točke kružnice. ***tetiva***
Najdulja tetiva prolazi središtem kružnice i naziva se **promjer (dijametar)** kružnice. Duljinu promjera označavamo s d. ***promjer***
Promjer kružnice dvostruko je veći od njezina polumjera, tj. $d = 2r$.

Opseg kruga polumjera duljine r računamo po formuli $o = 2r\pi$, a površinu $P = r^2\pi$.

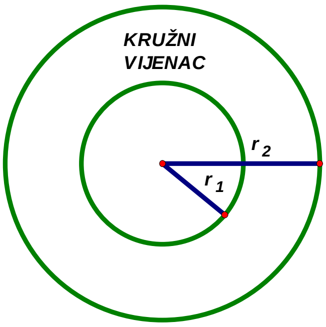
Kružni luk je dio kružnice između dviju točaka te kružnice. ***kružni luk***
Kružni isječak je dio kruga omeđen kružnim lukom i dvama polumjerima. ***kružni isječak***
Kružni odsječak omeđen kružnim lukom i tetivom. ***kružni odsječak***







Krajnje točke promjera kružnice dijele kružnicu na dvije **polukružnice**. Promjer dijeli krug na dva **polukruga**.



koncentrične kružnice

kružni vijenac

Kružnice koje imaju zajedničko središte nazivaju se **koncentrične kružnice**.
Kružni vijenac je dio ravnine omeđen dvjema koncentričnim kružnicama.

Opseg kružnog vijenca: $o = o_1 + o_2 = 2\pi(r_1 + r_2)$.
Površina kružnog vijenca: $P = P_2 - P_1 = \pi(r_2^2 - r_1^2)$.

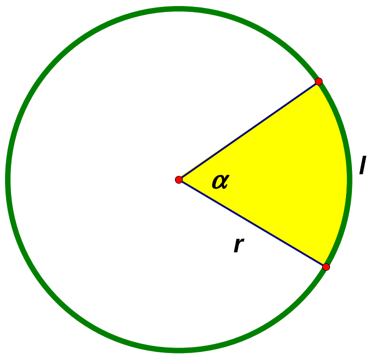
Primjer Opsezi dviju koncentričnih kružnica su 14π cm i 18π cm. Izračunajmo površinu kružnog vijenca određenog tim kružnicama.

Iz podataka o opsezima dviju kružnica nalazimo duljine njihovih polumjera. Iz $2r\pi = 14\pi$ slijedi da je duljina polumjera manje kružnice $r_1 = 7$ cm. Slično, iz $2r\pi = 18\pi$ dobivamo $r_2 = 9$ cm. Površina kružnog vijenca jednaka je $P = \pi(r_2^2 - r_1^2) = \pi(9^2 - 7^2) = 32\pi$ cm².

8.2. DULJINA KRUŽNOG LUKA I POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA

Kut kojemu je vrh na središtu kružnice nazivamo **središnji kut**.

središnji kut



Označimo s l duljinu kružnog luka, s r duljinu polumjera kružnice, a s α mjeru središnjeg kuta. Ako kružnim lukom smatramo cijelu kružnicu, onda je mjera njemu pripadnog središnjeg kuta $\alpha = 360°$, a $l = 2r\pi$. Stoga je duljina kružnog luka koji pripada kutu mjere $\alpha = 1°$ jednaka $l = \frac{2r\pi}{360°}$.
Iz toga zaključujemo da je duljina kružnog luka, koji pripada središnjem kutu mjere α: $l = \frac{r\pi\alpha}{180°}$.

duljina kružnog luka

Slično, zaključujemo da i površina kružnog isječka ovisi o mjeri središnjeg kuta. Za kut $\alpha = 360°$ pripadni kružni isječak je cijeli krug površine $r^2\pi$. Za kut mjere $\alpha = 1°$ površina pripadnog kružnog isječka je $P = \frac{r^2\pi}{360°}$. Za kut mjere α

površina kružnog isječka je $P = \dfrac{r^2 \pi \alpha}{360°}$.

Formulu možemo napisati i u drugom obliku: $P = \dfrac{r \cdot l}{2}$.

površina kružnog isječka

Primjer 1. Iz kruga s opsegom 157 cm izrezan je kružni isječak čija je površina 686.857 cm². Koliki je središnji kut tog isječka?

Iz opsega kruga računamo duljinu polumjera $r = 24.98$ cm, a onda iz formule za površinu kružnog isječka nalazimo: $\dfrac{24.98^2 \pi \alpha}{360°} = 686.857$, tj. $\alpha = 126°$.

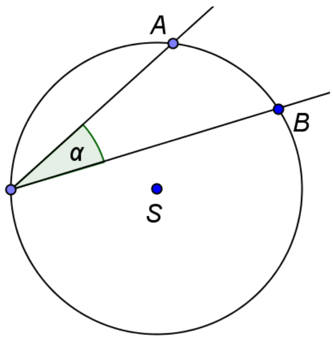
Primjer 2. Odredi središnji kut i površinu kružnog isječka ako je duljina pripadnog kružnog luka $\dfrac{5\pi}{3}$ cm, a promjer kruga 12 cm. Koliki dio cijeloga kruga, u postocima, zauzima površina kružnog isječka?

Polumjer kruga je 6 cm. Najprije iz $\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{6\pi\alpha}{180°}$ dobivamo $\alpha = 50°$. Sada je površina kružnog isječka $P = \dfrac{6^2 \pi \cdot 50°}{360°} = 5\pi$ cm², dok je površina kruga $P = 6^2 \pi = 36\pi$ cm². Površina kružnog isječka zauzima $\dfrac{100 \cdot 5\pi}{36\pi} = 13.\dot{8}$ % površine cijeloga kruga.

8.3. POUČAK O OBODNOM I SREDIŠNJEM KUTU KRUŽNICE. TALESOV POUČAK

Obodni kut kružnice je bilo koji kut kojemu je vrh na kružnici, a kraci mu sijeku kružnicu.

obodni kut



Na slici je obodni kut mjere α kojemu kraci sijeku kružnicu u točkama A i B. Tako je nacrtanom obodnom kutu jednoznačno pridružen kružni luk AB. Kažemo da je nacrtani kut obodni kut nad kružnim lukom AB. Jednom kružnom luku pridruženo je beskonačno mnogo obodnih kutova.

Poučak o obodnom i središnjem kutu:

Središnji kut nad nekim kružnim lukom dvostruko je veći od obodnog kuta nad istim kružnim lukom, tj.

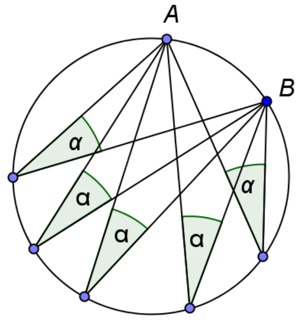
$$\beta = 2\alpha,$$

gdje je α mjera obodnog, a β mjera središnjeg kuta nad istim kružnim lukom.

poučak o obodnom i središnjem kutu

Iz navedenog poučka izvodimo dvije važne posljedice:

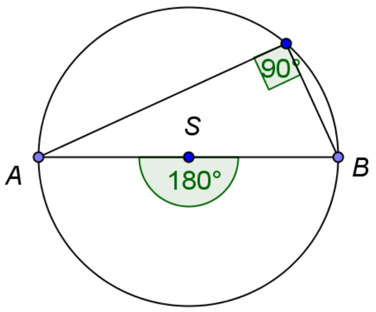
- Obodni kutovi nad istim kružnim lukom međusobno su jednaki.
- Kružnim lukovima jednakih duljina pridruženi su sukladni obodni kutovi.



Specijalni slučaj poučka o obodnom i središnjem kutu je Talesov poučak. Tada je središnji kut ispruženi kut, tj. kut mjere 180°.

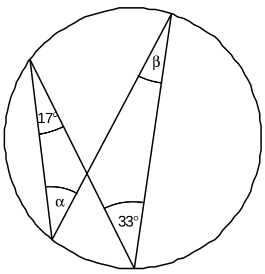
Talesov poučak:
Obodni kut nad promjerom kružnice je pravi kut.

Talesov poučak



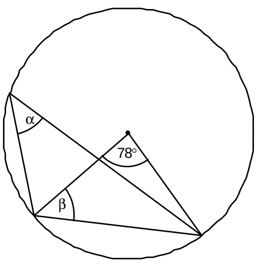
Primjer 1. Odredi (i objasni) mjere kutova sa slike:

a)



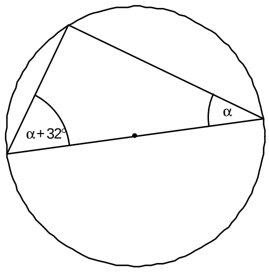
Budući da su obodni kutovi nad istim kružnim lukom međusobno jednaki, imamo $\alpha = 33°$ i $\beta = 17°$.

b)



Najprije je po poučku o obodnom i središnjem kutu $\alpha = \frac{78°}{2} = 39°$. Sada iz $2\beta + 78° = 180°$ slijedi $\beta = 51°$.

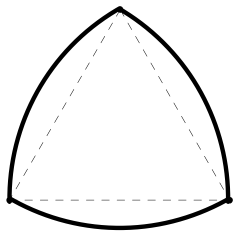
c)



Po Talesovom poučku zaključujemo da je treći kut trokuta pravi kut pa vrijedi:
$\alpha + 32° + \alpha = 90°$, odnosno $\alpha = 29°$.

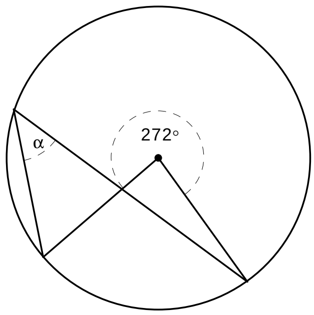
ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Površina kružnog vijenca je 640π cm². Ako je opseg manjeg kruga 12π cm, koliki je opseg većeg?
2. Širina kružnog vijenca je 12 cm, a zbroj duljina polumjera koncentričnih kružnica je 28 cm. Kolika je površina kružnog vijenca?
3. Kružnom isječku površine 40π cm² pripada središnji kut od 225°. Kolika je duljina odgovarajućeg kružnog luka? Koliko je to dio, u postocima, od cijelog opsega kruga?
4. Duljina manjeg kružnog luka određenog točkama A i B je 4π cm, a duljina većeg kružnog luka određenog istim točkama 20π cm. Odredite mjeru manjeg središnjeg kuta kojemu taj luk odgovara?
5. Oko svakog vrha jednakostraničnog trokuta duljine stranice 1 cm opisan je kružni luk s polumjerom duljine 1 cm. Koliki je opseg i površina „trzalice“, tj. tako dobivenog lika?

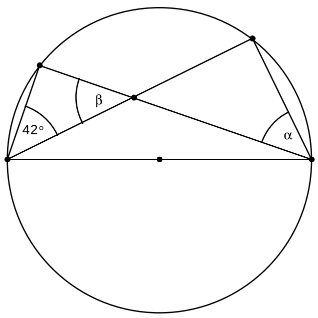


6. Zbroj mjera obodnog i njemu odgovarajućeg središnjeg kuta je 306°. Kolika je mjera obodnog kuta?
7. Odredite (i objasnite) mjere kutova sa slike:

a)



b)



KONTROLNA ZADAĆA – ZADACI ZA SAMOPROVJERU ZNANJ

PRIMJER PISANOG ISPITA ZNANJA IZ MATEMATIKE

1. Izračunajte:

a) $5-\frac{7}{9}\cdot 1\frac{2}{7}-\left(4-\frac{16}{25}:1\frac{11}{5}\right)=$

b) $\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{2}+3^{-2}}\right]^{-1}=$

c) $23\cdot\left(7^3\right)^6-15\cdot 7^5\cdot 7^{13}-7^{25}:7^7=$

d) $\frac{a^{-10}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{-9}\cdot\left(a^4\right)^7}{\left(\frac{1}{a^4}\right)^3\cdot a^{12}\cdot\left(a^{-3}\right)^5}=$

e) $\left(3a^5-\frac{1}{3}a\right)^3=$

f) $(ax-by)^2-(ax+by)^2=$

g) $\frac{a^2-1}{2a^2+a}\cdot\frac{4a+2}{5a+5}=$

h) $\frac{6x^3y^2+6x^2y^3}{4x^2+4x+1}:\frac{2x^3-2xy^2}{4x+2}=$

i) $\frac{b}{4a^2+ab}-\frac{16a}{4ab+b^2}=$

j) $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{16}+\frac{3}{2}\sqrt{20}+\frac{4}{5}\sqrt[3]{250}-\frac{3}{4}\sqrt{80}=$

k) $\sqrt[5]{6}\cdot\sqrt[5]{224}\cdot\sqrt[5]{-\frac{1}{42}}=$

l) $\sqrt[6]{a^2\cdot\sqrt[4]{a^6}}\cdot\sqrt{a\cdot\sqrt[6]{a^{11}}}=$

m) $16^{0.5}+\left(\frac{1}{16}\right)^{-0.75}=$

n) $\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{a^{-4}}=$

2. Racionalizirajte nazivnike: a) $\frac{ab^7}{\sqrt[7]{a^5b^3}}=$ b) $\frac{11}{\sqrt{5}+3\sqrt{3}}=$

3. Riješite jednadžbe:

a) $\frac{1-0.5x}{3}-\frac{2-0.25x}{4}=-1$,

b) $(x-5)^2+1=x+(x+3)^2$,

c) $\left||1-4x|-4\right|=9$,

d) $\sqrt{x^2+10}=x+2$.

4. Riješite nejednadžbe:
   a) $2\cdot[x+3\cdot(x-7)-5\cdot(1+x)]\leq 9-3x$,
   b) $(5x+4)\cdot(1-4x)<0$ (raspisati slučajeve),
   c) $\dfrac{-2-3x}{5x+4}\geq 0$ (tablica predznaka),
   d) $|3-7x|\geq 4$.

5. Riješite sustav nejednadžbi: $\begin{cases} 2x-6-\dfrac{16-x}{3}\leq\dfrac{x+3}{2} \\ \dfrac{1}{2}\cdot(x-5)>2\cdot(5-x)\end{cases}$.

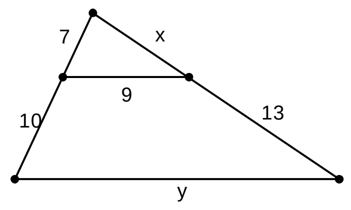
6. Riješite sustave jednadžbi:
   a) metodom suprotnih koeficijenata: $\begin{cases} \dfrac{x+y}{8}-\dfrac{x-y+1}{5}=0 \\ \dfrac{2x-3y}{2}-\dfrac{x+y+1}{3}=0\end{cases}$,
   b) grafičkom metodom: $\begin{cases} y=-\dfrac{1}{3}x+4 \\ -2x-6y+6=0\end{cases}$.

7. Izračunajte koordinate točke A i duljinu dužine $\overline{AB}$ ako je $B(-4,0)$ i $P(-3,3)$, gdje je P polovište dužine $\overline{AB}$.

8. a) U koordinatnom sustavu nacrtajte pravac $x-3y-9=0$.
   b) Navedite jednadžbe barem dvaju pravca koji su paralelni sa zadanim pravcem.
   c) Navedite jednadžbu pravca koji je okomit na zadani pravac i prolazi ishodištem koordinatnog sustava.
   d) Pripada li točka $T(-69,-25)$ zadanom pravcu?

9. Primjenom formule za površinu trokuta zadanog koordinatama vrhova, odredite površinu trokuta kojemu stranice leže na pravcima $x=3$, $y=-4$ i $3x-y-7=0$? Nacrtajte taj trokut u koordinatnom sustavu.

10. Izračunajte nepoznate elemente na slici:



11. Opsezi dvaju sličnih trokuta odnose se kao 3 : 5. Duljina jedne stranice većeg trokuta je 20 cm. Duljina visine na tu stranicu je 10 cm. Izračunajte površinu većeg trokuta te koristeći dobiveni rezultat, izračunaj površinu manjeg trokuta.

12. Odredite mjeru središnjeg kuta i površinu kružnog isječka ako je duljina pripadnog kružnog luka $\dfrac{8\pi}{9}$ cm, a promjer kruga 8 cm. Koliki dio cijeloga kruga, u postocima, zauzima površina kružnog isječka?

KORIŠTENA LITERATURA:

[1] I. Gusić, J. Krajina, *Matematika* 1, udžbenik sa zbirkom zadataka za strukovne škole, I. i II. dio, Školska knjiga, Zagreb, 2007.

[2] Branimir Dakić, Neven Elezović, *Matematika* 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazija, 1. i 2. dio, Element, Zagreb, 2006.

[3] Ivan Mrkonjić, *Matematika u struci* 1, udžbenik sa zbirkom zadataka, Neodidacta, Zagreb, 2007.